L2 - PCSTM - Parcours Mécanique

Résistance des Matériaux

2$^{\text{nde}}$ session 2014-2015 – Durée : 2h00

Responsable : L. Blanchard

Eléments de correction

Exercice n°1 – Comparaison de 2 sections en torsion

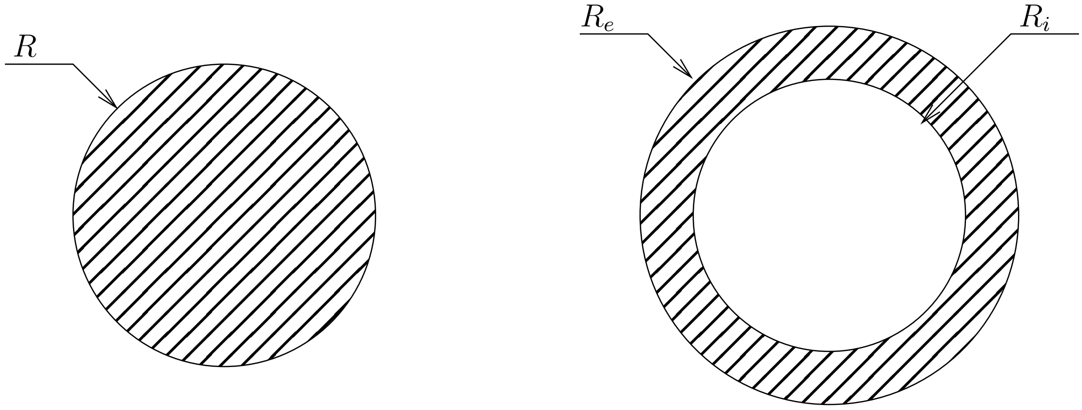


Fig. 1 – Deux sections droites de poutre soumise à un moment de torsion (indice 1 pour la section pleine à gauche et indice 2 pour la section creuse à droite).

1) Les masses :

$$m_1 = \rho\pi R^2 L \qquad \text{et} \qquad m_2 = \rho\pi(R_e^2 - R_i^2)L \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{R_e^2 - R_i^2}{R^2}$$

.... **[0.5]**

2) Les moments quadratiques :

$$I_1 = 2\pi\int_0^R r^3 \mathrm{d}r = 2\pi\frac{R^4}{4} = \pi\frac{R^4}{2} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \pi\frac{R_e^4 - R_i^4}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_e^4 - R_i^4}{R^4}$$

.... **[0.75]**

3) Les contraintes maximum de cisaillement :

$$\tau_1 = \frac{\mathbb{M}_T}{I_1}R = \frac{2\mathbb{M}_T}{\pi R^3} \qquad \text{et} \qquad \tau_2 = \frac{\mathbb{M}_T}{I_2}R_e = \frac{2\mathbb{M}_T}{\pi(R_e^4 - R_i^4)}R_e \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R^3}{(R_e^4 - R_i^4)}R_e$$

.... **[1]**

4) Les rotations de section droite :

$$\mathbb{M}_T = GI_1\theta_1' = GI_1\frac{\theta_1}{L} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_1 = \frac{\mathbb{M}_T L}{GI_1} = \frac{2\mathbb{M}_T L}{G\pi R^4} \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \frac{\mathbb{M}_T L}{GI_2} = \frac{2\mathbb{M}_T L}{G\pi(R_e^4 - R_i^4)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{R^4}{(R_e^4 - R_i^4)}$$

.... **[1]**

5) On donne $R = 20$ mm et $R_e - R_i = 2$ mm. Vu les valeurs on a $R = 10(R_e - R_i)$ donc :

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{R_e^2 - R_i^2}{R^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad (R_e + R_i)(R_e - R_i) = 10^2(R_e - R_i)^2 \quad \Longrightarrow \quad (R_e + R_i) = 100(R_e - R_i) = 200 \text{ mm}$$
$$(R_e - R_i) + (R_e + R_i) = 2R_e = 202 \text{ mm} \quad \Longrightarrow \quad R_e = 101 \text{ mm} \quad \Longrightarrow \quad R_i = 99 \text{ mm}$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R^3}{(R_e^4 - R_i^4)} R_e = 0.101 = \frac{1}{9.90} \qquad \text{et} \qquad \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{R^4}{(R_e^4 - R_i^4)} = 0.020 = \frac{1}{50.00}$$

Pour la section creuse, on a une contrainte près de 10 fois plus petite et une rotation de section 50 fois plus petite. .... **[2]**

6)

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{R^4}{(R_e^4 - R_i^4)} = 1 \quad \Longrightarrow \quad R_e^4 - (R_e - 2)^4 = R^4 \quad \Longrightarrow \quad R_e^4 - ({R_e}^2 - 4R_e + 4)^2 = R^4$$
$$\Longrightarrow \quad R_e^4 - ({R_e}^4 - 8{R_e}^3 + 8{R_e}^2 + 16{R_e}^2 - 32R_e + 16) = R^4 \quad \Longrightarrow \quad 8{R_e}^3 - 24{R_e}^2 + 32R_e - 160016 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad R_e = 28.1319 \text{ mm} \quad \Longrightarrow \quad R_i = 26.1319 \text{ mm}$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R^3}{(R_e^4 - R_i^4)} R_e = 5.05 \qquad \text{et} \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{R_e^2 - R_i^2}{R^2} = 0.27 = \frac{1}{3.69}$$

Pour la section creuse, on a une contrainte 5 fois plus grande et une masse 3.7 fois plus petite. .... **[3]**

7) On donne cette fois $R_e = 28$ mm et $R_i = 26$ mm.

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R^3}{(R_e^4 - R_i^4)} R_e = 1 \quad \Longrightarrow \quad R^3 = \frac{(R_e^4 - R_i^4)}{R_e} \quad \Longrightarrow \quad R = 17.791 \text{ mm}$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{R^4}{(R_e^4 - R_i^4)} = 0.635 = \frac{1}{1.57} \qquad \text{et} \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{R_e^2 - R_i^2}{R^2} = 0.34 = \frac{1}{2.93}$$

Pour la section creuse, on a une rotation 1.57 fois plus petite et une masse 2.93 fois plus petite. .... **[2]**

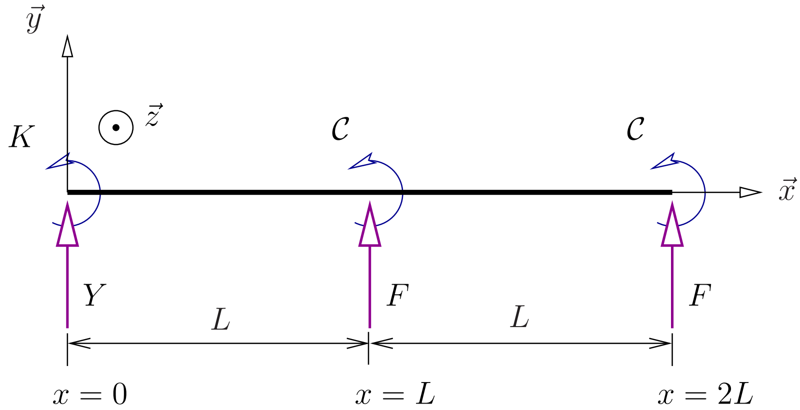
8) La section creuse est, à contraintes identiques, plus légère et plus rigide. .... **[0.5]**

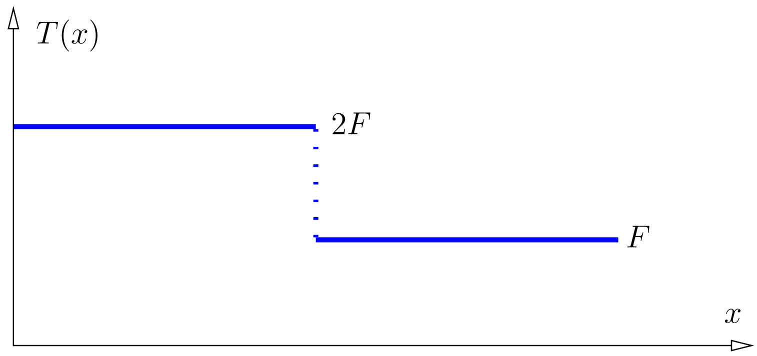
---

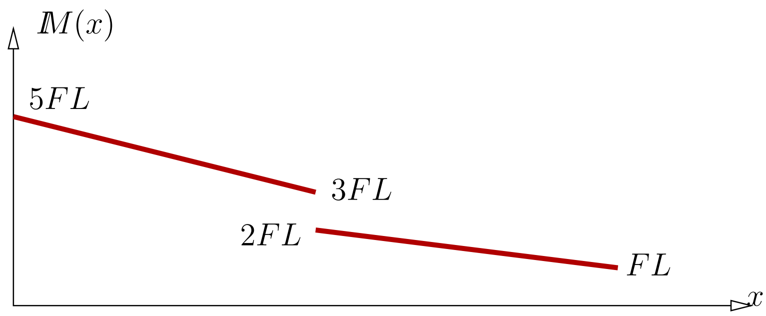
9) Le **P.F.S.** à toute la poutre :

$$\begin{cases} Y + 2F = 0 \quad \Longrightarrow \quad Y = -2F \\ K + 2\mathcal{C} + FL + 2FL = 0 \quad \Longrightarrow \quad K = -5FL \end{cases}$$

10)







$$
\begin{array}{ll}
x \in [0:L] & x \in [L:2L] \\
EIv" = 2\mathcal{C} + F(2L-x) + F(L-x) & EIv" = \mathcal{C} + F(2L-x) \\
EIv" = F(5L-2x) & EIv" = F(3L-x) \\
EIv' = F(5Lx - x^2 + A) & EIv' = F(3Lx - \frac{1}{2}x^2 + B) \\
\text{or } v'(0) = 0 \implies A = 0 & \\
EIv = F(\frac{5}{2}Lx^2 - \frac{1}{3}x^3 + D) & EIv = F(\frac{3}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3 + Bx + G) \\
\text{or } v(0) = 0 \implies D = 0 &
\end{array}
$$

11)

La continuité de la rotation de section droite (donc de $v'(x)$) en $x = L$ donne :

$$EIv'(L) = F4L^2 = F(3L^2 - \frac{1}{2}L^2 + B) \implies B = \frac{3}{2}L^2$$

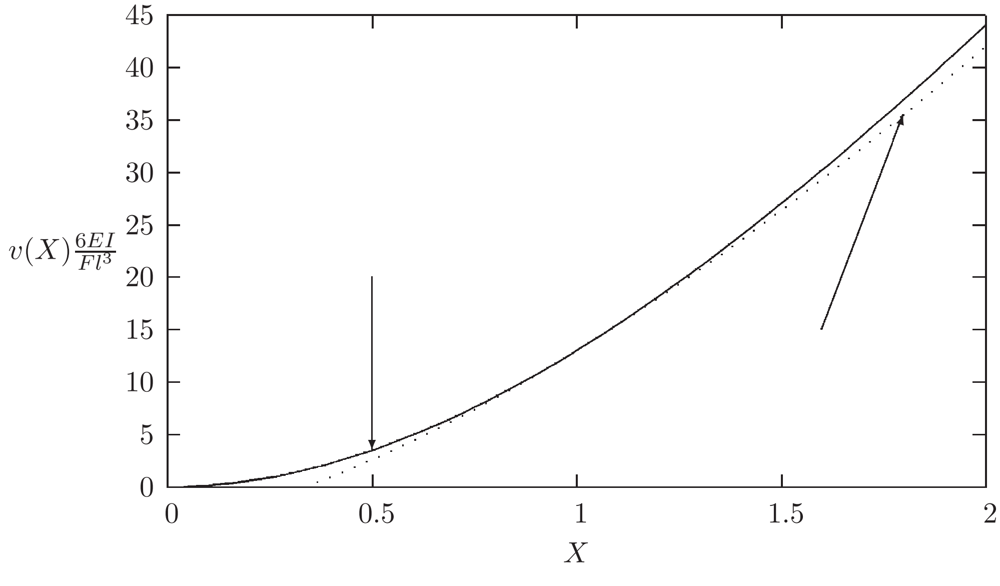
La continuité de la flèche (donc de $v(x)$) en $x = L$ donne :

$$EIv(L) = F(\frac{5}{2}L^3 - \frac{1}{3}L^3) = F(\frac{3}{2}L^3 - \frac{1}{6}L^3 + BL + G) \implies G = (\frac{5}{2} - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2})L^3 \implies G = -\frac{2}{3}FL^3$$

On obtient alors :

$$
\begin{array}{ll}
x \in [0:L], X = \frac{x}{L} \in [0:1] & x \in [L:2L], X = \frac{x}{L} \in [1:2] \\
v(x) = \frac{FL^3}{6EI}\left(15X^2 - 2X^3\right) & v(x) = \frac{FL^3}{6EI}\left(9X^2 - X^3 + 9X - 4\right)
\end{array}
$$

soit une allure de flèche dans les 2 portions :



Flèche Maxi :

$$v(2L) = 42\frac{Fl^3}{6EI} = \frac{7Fl^3}{EI}$$

12) Contrainte Maxi :

$$\sigma = \frac{I\!M(0)}{I}\frac{h}{2} = 5FL\frac{12}{bh^3}\frac{h}{2} = \frac{30FL}{bh^2}$$

en $x = 0$ et $y = +\frac{h}{2}$: compression,
en $x = 0$ et $y = -\frac{h}{2}$: traction.