**L2 - PCSTM - Parcours Mécanique**
**Résistance des Matériaux**
**2$^{\text{nde}}$ session 2014-2015 – Durée : 2h00**
**Responsable : L. Blanchard**
**Documents interdits – Calculatrice autorisée**

---

Le but est de comparer les 2 sections droites de la Fig. 1 au niveau de la contrainte, de la rotation de section droite et de la masse de la poutre.

La poutre circulaire pleine (1) est de rayon $R$, la creuse (2) est de rayon extérieur $R_e$ et intérieur $R_i$. Ces sections sont mises sur deux poutres de même longueur $L$, même matériau (masse volumique $\rho$, limite élastique $R_e$, module d'élasticité transversal $G$) et subissant le même moment de torsion $\mathbb{M}_T$.

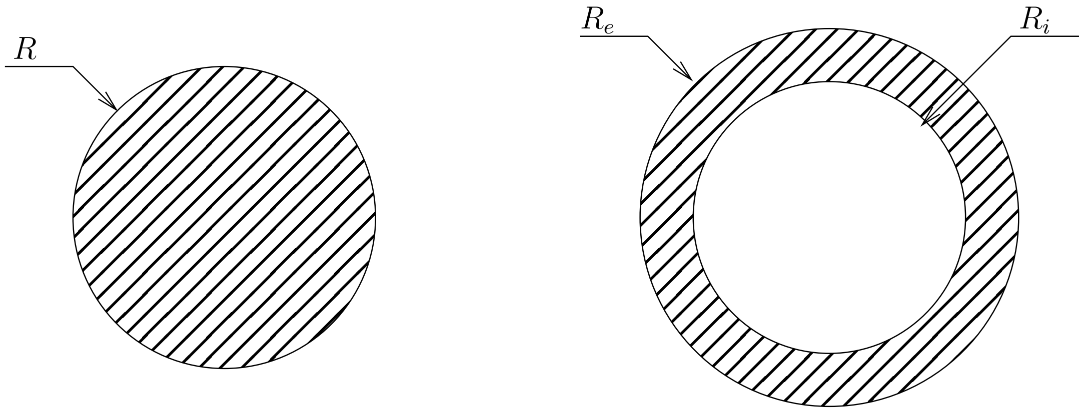



Fig. 1 – Deux sections droites de poutre soumises à un moment de torsion.

L'indice (1) (respectivement (2)) est relatif à la poutre pleine (respectivement creuse). Les rapports suivant seront définis par $\frac{f_2}{f_1}$ où $f$ est la variable étudiée (masse, moment quadratique, contrainte ou rotation).

**1)** Pour chacune des sections, exprimez la masse de chaque poutre. En déduire le rapport de masses entre les 2 poutres. ........ **[0.5]**

**2)** Pour chacune des sections, exprimez le moment quadratique. En déduire le rapport des moments quadratiques. ........ **[0.5]**

**3)** Pour chacune des sections, exprimez la contrainte maximum de cisaillement. En déduire le rapport des contraintes maximum. ........ **[1]**

**4)** Pour chacune des sections, exprimez la rotation de section droite. ........ **[1]**

**5)** On donne $R = 20$ mm et $R_e - R_i = 2$ mm et l'on souhaite avoir les mêmes masses de poutre. Déterminez $R_e$ et $R_i$.
Déterminez alors les rapports de contraintes et de rotations. ........ **[2]**

**6)** On donne à nouveau $R = 20$ mm et $R_e - R_i = 2$ mm et l'on souhaite avoir les mêmes rotations de section. Démontrez que $R_e$ satisfait une équation du type :

$$a{R_e}^3 + b{R_e}^2 + cR_e + d = 0$$

où vous donnerez les valeurs des 4 constantes en exprimant $R_e$ en mm.
Après avoir tracé la courbe $f(R_e) = a{R_e}^3 + b{R_e}^2 + cR_e + d$ avec votre calculatrice, évaluez $R_e$ et en déduire $R_i$.
Déterminez alors les rapports de contraintes et de masses. ........ **[3]**

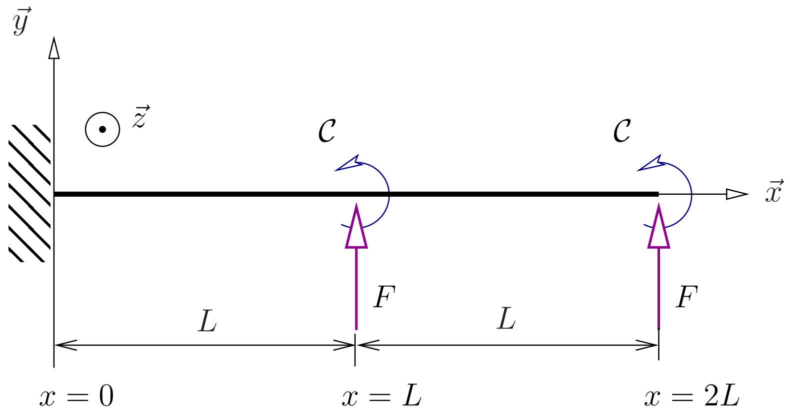
**7)** On donne cette fois $R_e = 28$ mm et $R_i = 26$ mm et l'on souhaite avoir les mêmes contraintes. Déterminez $R$.
Déterminez alors les rapports de rotations et de masses. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[1.5]**

**8)** Laquelle des 2 sections vous semble préférable. Argumentez. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[0.5]**

---

La poutre de longueur $2L$ est encastrée en $x = 0$.
La poutre est soumise à deux forces ponctuelles $\vec{F} = F\vec{y}$ en $x = L$ et $\vec{F} = F\vec{y}$ en $x = 2L$ ainsi qu'à deux couples concentrés $\vec{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\vec{z}$ en $x = L$ et $\vec{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\vec{z}$ en $x = 2L$ ; Les valeurs de $F$ et $\mathcal{C}$ sont telles que $\mathcal{C} = FL$.
La section constante de la poutre est de hauteur $h$ (suivant $\vec{y}$) et de largeur $b$ (suivant $\vec{z}$).
Le matériau de cette poutre est élastique linéaire, homogène et isotrope de module d'élasticité $E$ et de limite élastique $R_e$.
L'accélération de la pesanteur n'est pas prise en compte.

Les calculs suivant sont analytiques. Les valeurs de $F$, $L$ et $\mathcal{C}$ sont telles que $\mathcal{C} = FL$.




**9)** Déterminez l'action exercée par l'encastrement sur la poutre. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[0.75]**

**10)** Déterminez les expressions de l'effort tranchant suivant la direction $\vec{y}$ ($T(x)$) et du moment fléchissant suivant la direction $\vec{z}$ ($\mathbb{M}(x)$).
Tracez précisement les graphes de ces fonctions en précisant des expressions analytiques sur les axes. **[3]**

**11)** Déterminez l'expression de la flèche $v(x)$.
Tracez la déformée de la poutre.
Déterminez l'expression de la flèche maximum. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[5.5]**

**12)** Déterminez l'expression de la contrainte maximum de tension (traction-compression).
Quel(s) point(s) subit (subissent) cette contrainte en traction ? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **[0.75]**