Licence L2 - PCSTM - Parcours Mécanique

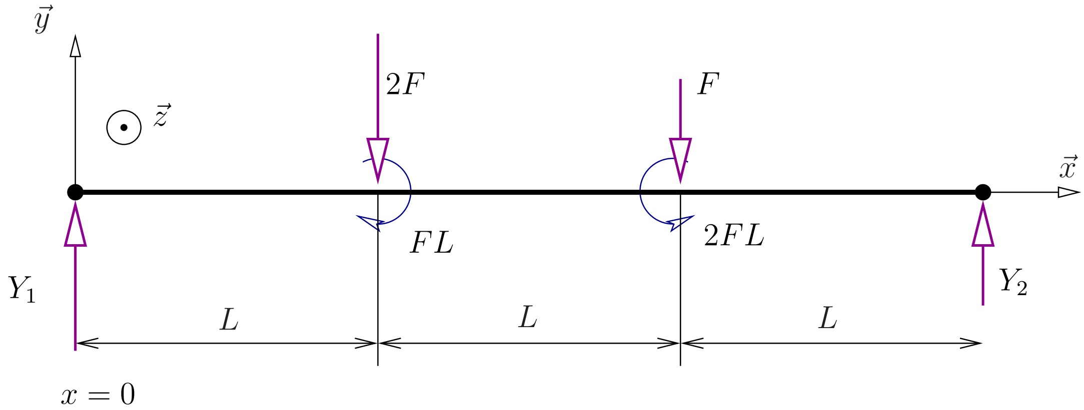
Examen Résistance des Matériaux

$1^{\text{ère}}$ session 2014-2015 _ Durée : 2h00

Responsable : L. Blanchard

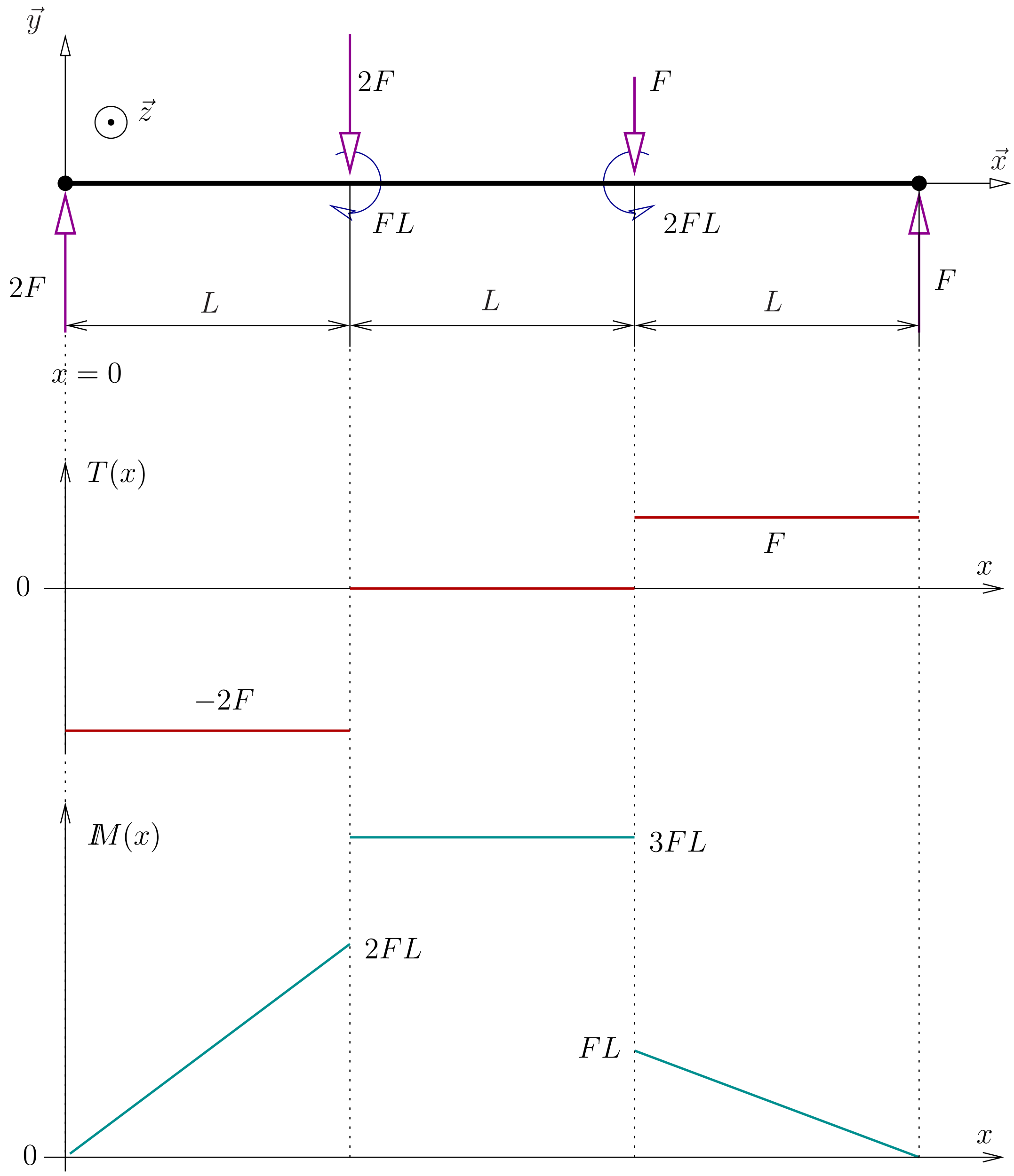
Eléments de correction

Isolons toute la poutre et appliquons l'équation du moment du **P.F.S.** :



$$\text{moment en } x=0 : 3Y_2L - 2FL - 2FL - FL + 2FL = 0 \quad \Longrightarrow \quad Y_2 = F = 800 \text{ N}$$
$$\text{en } x=3L : -3Y_1L + 4FL + FL + 2FL - FL = 0 \quad \Longrightarrow \quad Y_1 = 2F = 1600 \text{ N}$$

On vérifie que $Y_1 + Y_2 - F - 2F = 0$.



$x \in [0;L]$	$x \in [L;2L]$	$x \in [2L;3L]$
$M(x) = EIv"(x) = 2Fx$	$M(x) = EIv"(x) = 3FL$	$M(x) = EIv"(x) = F(3L - x)$
$EIv'(x) = F(x^2 + A)$	$EIv'(x) = F(3Lx + C)$	$EIv'(x) = F(3Lx - \frac{1}{2}x^2 + G)$
$EIv(x) = F(\frac{1}{3}x^3 + Ax + B)$	$EIv(x) = F(\frac{3L}{2}x^2 + Cx + D)$	$EIv(x) = F(\frac{3}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3 + Gx + H)$

Les 6 conditions sont :

$v(0) = 0$		$v(3L) = 0$

continuité de $v(x)$ en $x = L$

continuité de $v'(x)$ en $x = L$

continuité de $v(x)$ en $x = 2L$

continuité de $v'(x)$ en $x = 2L$

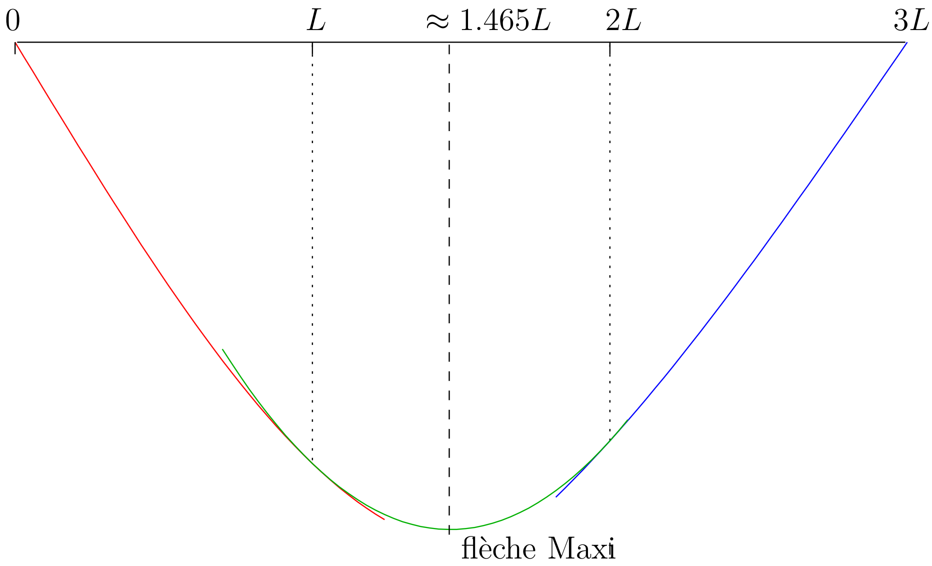
Les 6 conditions donnent :

$$\begin{cases} B=0 \\ 9L^3+3LG+H=0 \\ A=2L^2+C \\ C=G-2L^2 \\ AL=\frac{7}{6}L^3+CL+D \\ 2CL+D=2GL+H-\frac{4}{3}L^3 \end{cases} \implies \begin{cases} A=G=C-2L^2=-\frac{43}{18}L^2 \\ H=-15L^3-3LC=-\frac{33}{18}L^3 \\ D=\frac{5}{6}L^3 \\ C=-\frac{79}{18}L^2 \end{cases}$$

On peut conclure sur les 3 expressions donnant la flèche en posant $X=\frac{x}{L}$:

$x\in[0;L]$	$x\in[L;2L]$	$x\in[2L;3L]$
$X\in[0;1]$	$X\in[1;2]$	$X\in[2;3]$
$v(x)=\frac{FL^3}{18EI}(6X^3-43X)$	$v(x)=\frac{FL^3}{18EI}(27X^2-79X+15)$	$v(x)=\frac{FL^3}{18EI}(27X^2-3X^3-43X-33)$

Donc voici l'allure de la déformée amplifiée par 27 environ.



La flèche maxi est approximativement pour $x_0\approx 1.46L$ mais on peut la trouver analytiquement :

$$\text{pour } x\in[L;2L] : v'(x_0)=0 \implies 3Lx_0+C=0 \implies x_0=\frac{79}{18*3}L \implies X_0=\frac{x_0}{L}=\frac{79}{54}\approx 1.463$$

et la flèche maxi est :

$$v(x_0)=\frac{FL^3}{18EI}\left(27X_0^2-79X_0+15\right)=\frac{124767}{54^2}\frac{FL^3}{18EI}=\frac{4621}{108}\frac{FL^3}{18EI}=\frac{4621}{1944}\frac{FL^3}{EI}\approx 19.87\text{ mm}$$

Le moment fléchissant est maximum pour $x\in[L;2L]$ et vaut : $3FL$. La contrainte de tension est maximum pour toute cette plage en x et $y=\pm\frac{h}{2}$ (traction pour $y=-\frac{h}{2}$ et compression pour $y=+\frac{h}{2}$) et vaut :

$$\sigma_M=\frac{3FL}{bh^3}12\frac{h}{2}=\frac{18FL}{bh^2}=224\text{ MPa}<R_e=320\text{ MPa}$$

Le coefficient de sécurité est environ 1.428.

Moment quadratique :

$$I=\frac{bh^3}{12}\approx 30000\text{ mm}^4$$

Y_1 l'action à l'appui double et Y_2 celle à l'appui simple.

$$
\begin{aligned}
Y_2 2L = qL\frac{3L}{2} \quad &\Longrightarrow \quad Y_2 = \frac{3qL}{4} = 750 \text{ N} \\
Y_1 2L = qL\frac{L}{2} \quad &\Longrightarrow \quad Y_1 = \frac{qL}{4} = 250 \text{ N} \\
&\text{on a bien : } Y_1 + Y_2 = qL
\end{aligned}
$$

$x \in [0 : L]$:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= -Y_1 = -\tfrac{qL}{4} \\
M(x) &= Y_1 x = \tfrac{qL}{4} x
\end{aligned}
$$

$x \in [L : 2L]$:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= Y_2 - q(2L - x) = \tfrac{3qL}{4} - q(2L - x) = \tfrac{q}{4}\left[3L - 4(2L - x)\right] \\
M(x) &= Y_2(2L - x) - \tfrac{1}{2}q(2L - x)^2 = \tfrac{3qL}{4}(2L - x) - \tfrac{1}{2}q(2L - x)^2 = \tfrac{q}{4}\left[3L(2L - x) - 2(2L - x)^2\right]
\end{aligned}
$$

Venir en TD pour plus d'explications.