Licence L2 - PCSTM - Parcours Mécanique

Partie Résistance des Matériaux

1ère session 2012-2013 _ Durée : 1h15

Responsable : L. Blanchard

Eléments de correction

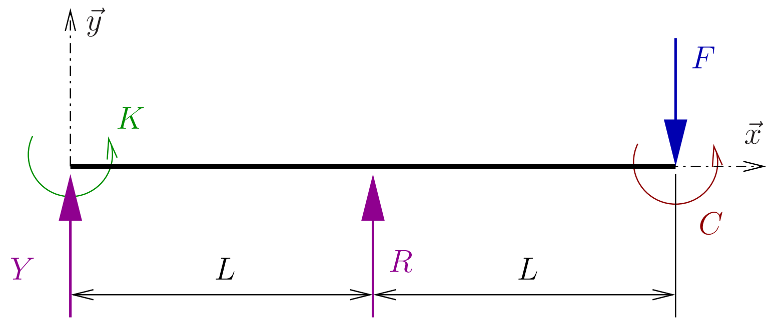

FIG. 1 –

Le **P.F.S.** à toute la poutre aboutit à 2 équations à 3 inconnues Y, R et K :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y+R-F &=& 0 \\ K+C+RL-2FL &=& 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Y+R-F &=& 0 \\ K+RL-FL &=& 0 \end{array}\right.$$

Le problème est hyperstatique d'ordre 1.

$x \in [0; L]$

$$\begin{array}{rcl} T(x) &=& -F+R \\ I\!M(x) &=& C-F(2L-x)+R(L-x) \\ EIv"(x) &=& (F-R)(x-L) \\ EIv'(x) &=& (F-R)\left(\dfrac{x^2}{2}-Lx+A\right) \\ EIv(x) &=& (F-R)\left(\dfrac{x^3}{6}-L\dfrac{x^2}{2}+Ax+B\right) \end{array}$$

$x \in [L; 2L]$

$$\begin{array}{rcl} T(x) &=& -F \\ I\!M(x) &=& C-F(2L-x) \\ EIv"(x) &=& F(x-L) \\ EIv'(x) &=& F\left(\dfrac{x^2}{2}-Lx+D\right) \\ EIv(x) &=& F\left(\dfrac{x^3}{6}-L\dfrac{x^2}{2}+Dx+G\right) \end{array}$$

or les conditions sur la flèche sont :

$v(0)=0$; $v'(0)=0$; $v(L)=0$; $v(x)$ continue en L ; $v'(x)$ continue en L

donc :

$$\left\{\begin{array}{l} B=0 \\ A=0 \\ (F-R)\left[\frac{L^3}{6}-L\frac{L^2}{2}\right]=0 \\ F\left[\frac{L^3}{6}-L\frac{L^2}{2}+DL+G\right]=0 \\ (F-R)\left(\frac{L^2}{2}-L^2\right)=F\left(\frac{L^2}{2}-L^2+D\right) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} F=R \\ DL+G=\frac{L^3}{3} \\ -R\left(\frac{L^2}{2}-L^2\right)=FD \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad D = \frac{L^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad G = \frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{2} = -\frac{L^3}{6}$$

$$x \in [0; L] \quad ; \quad X \in [0; 1]$$

$$EIv(x) = 0$$

$$x \in [L; 2L] \quad ; \quad X \in [1; 2]$$

$$\begin{aligned} EIv(x) &= F\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{2}x - \frac{L^3}{6}\right) \\ EIv(x) &= \frac{FL^3}{6}\left(X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right) \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à tracer les fonctions adimensionnées (cf FIG. 2).

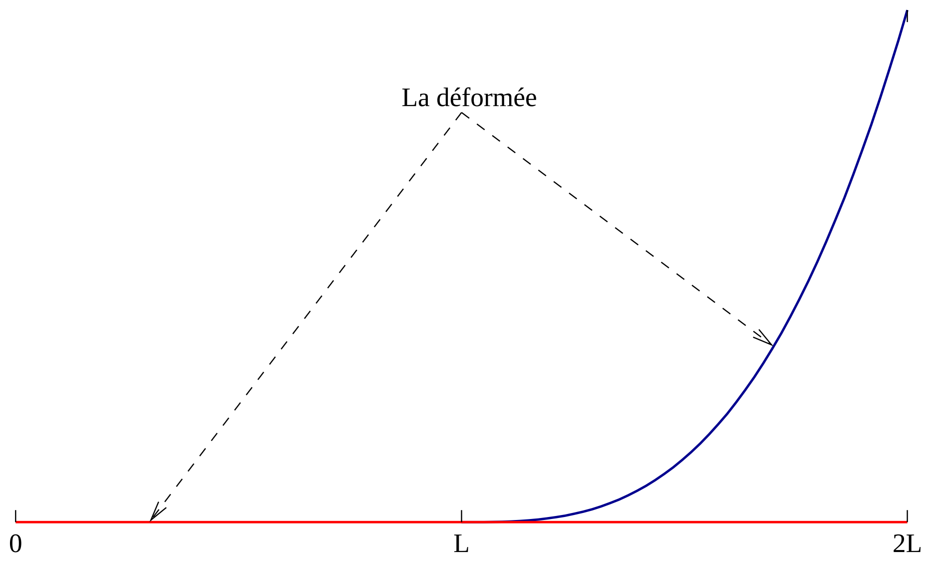

FIG. 2 – Allure de la déformée : aucun déplacement sur $x \in [0; L]$.

On a : $I = \frac{bh^3}{12} \approx 8\,000$ mm^4
La flèche maxi est en $x = 2L$:

$$v(2L) = v(X = 2) = \frac{FL^3}{6EI} = \text{...} \text{ mm}$$

On peut maintenant déterminer les efforts aux liaisons et les actions intérieures.

$$\left\{\begin{aligned} R &= F \\ Y + F - F &= 0 \\ K + FL - FL &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} R &= F \\ Y &= 0 \\ K &= 0 \end{aligned}\right.$$

Le moment fléchissant est extrême en $x = 2L$ et vaut $FL = \text{...}$ N.m. La contrainte est maxi en $x = 2L$ et pour $y = \pm\frac{h}{2}$ et vaut :

$$\sigma = \frac{FL}{I}\frac{h}{2} = \text{...} \text{ MPa} \quad \text{où} \quad I = \frac{bh^3}{12} \approx 8\,000 \text{ mm}^4$$

Les points situés à $y = -\frac{h}{2}$ subissent de la traction ; ceux à $y = +\frac{h}{2}$ de la compression.

La poutre reste dans le domaine élastique : le coefficient de sécurité est $\frac{R_e}{\sigma} = \text{....}$

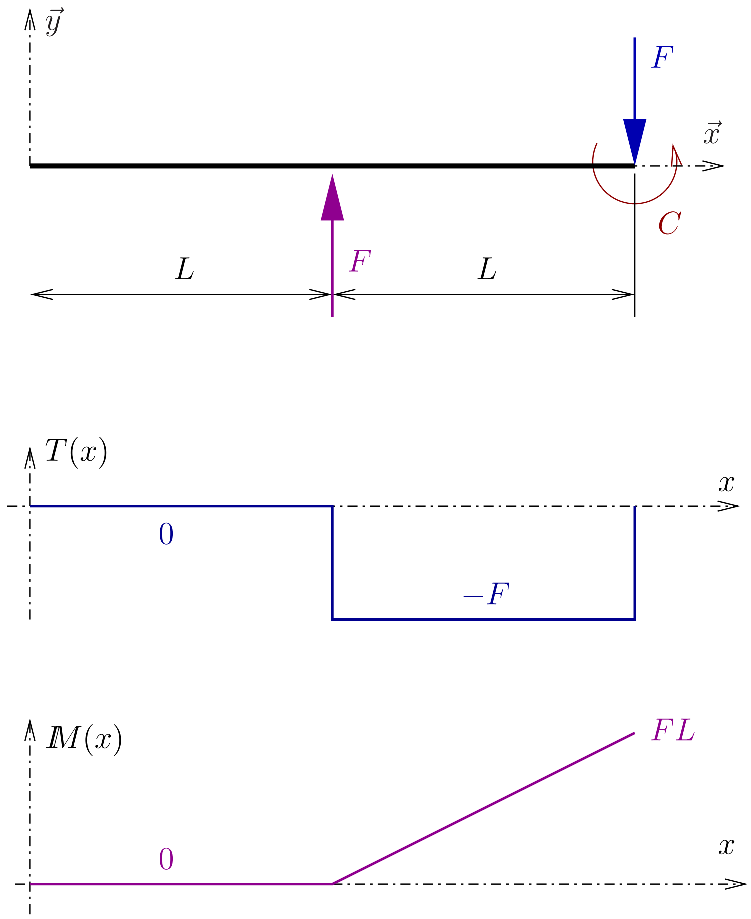

FIG. 3 –