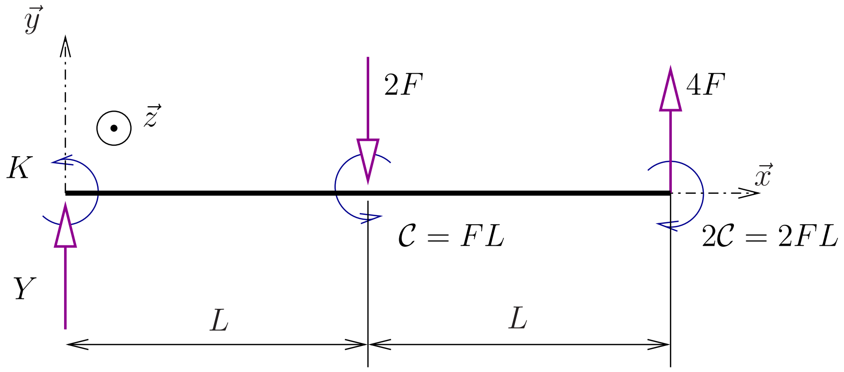
Licence L2 - PCSTM - Parcours Mécanique

Examen Résistance des Matériaux

1ère session 2013-2014 – Durée : 2h00

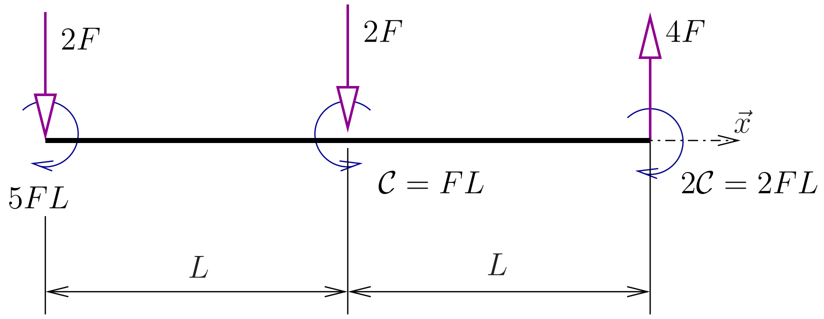
Responsable : L. Blanchard

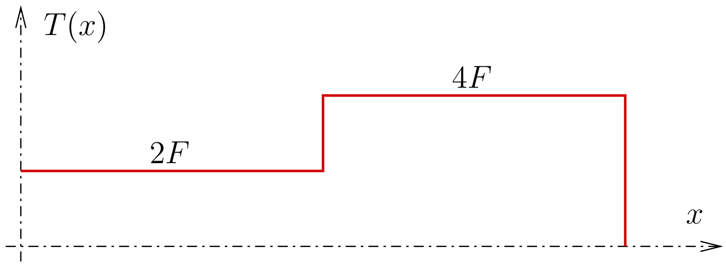
Eléments de correction

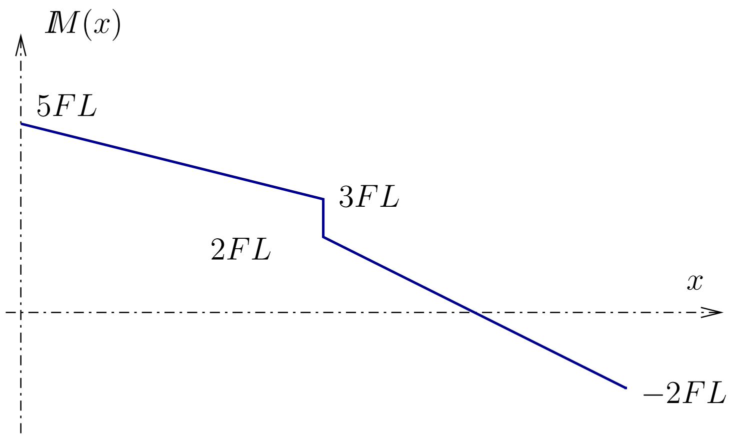


Le **P.F.S.** appliqué à toute la poutre (équation des moments en $x = 0$) donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y - 2F + 4F & = & 0 \\ K + \mathcal{C} - 2\mathcal{C} - 2F\,L + 4F\,2L & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Y & = & -2F \\ K & = & \mathcal{C} - 6FL = -5FL \end{array} \right.$$







$$x \in [0:L]$$

$$T(x) = 2F$$

$$M(x) = F(-2x + 5L)$$

$$EIv'' = F(-2x + 5L)$$

$$EIv' = F(-x^2 + 5Lx + A)$$

$$\text{or } v'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 0$$

$$EIv = F(-\frac{x^3}{3} + 5L\frac{x^2}{2} + D)$$

$$\text{or } v(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = 0$$

$$EIv(x) = \frac{F}{6}(-2x^3 + 15Lx^2)$$

$$x \in [L:2L]$$

$$T(x) = 4F$$

$$M(x) = F(-4x + 6L)$$

$$EIv'' = F(-4x + 6L)$$

$$EIv' = F(-2x^2 + 6Lx + B)$$

$$EIv = F(-2\frac{x^3}{3} + 3Lx^2 + Bx + G)$$

$$EIv(x) = \frac{F}{6}(-4x^3 + 18Lx^2 + 6Bx + 6G)$$

La continuité de la rotation de section droite (donc de $v'(x)$) en $x = L$ donne :

$$-L^2 + 5L^2 = -2L^2 + 6L^2 + B \quad \Longrightarrow \quad B = 0$$

La continuité de la flèche (donc de $v(x)$) en $x = L$ donne :

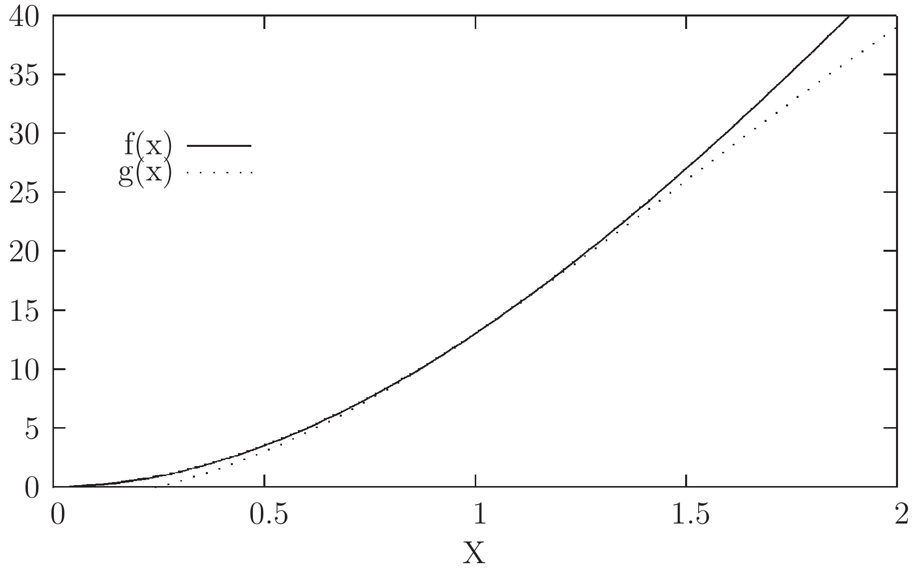
$$-2L^3 + 15L^3 = -4L^3 + 18L^3 + 6G \quad \Longrightarrow \quad 6G = -L^3$$

On obtient alors :

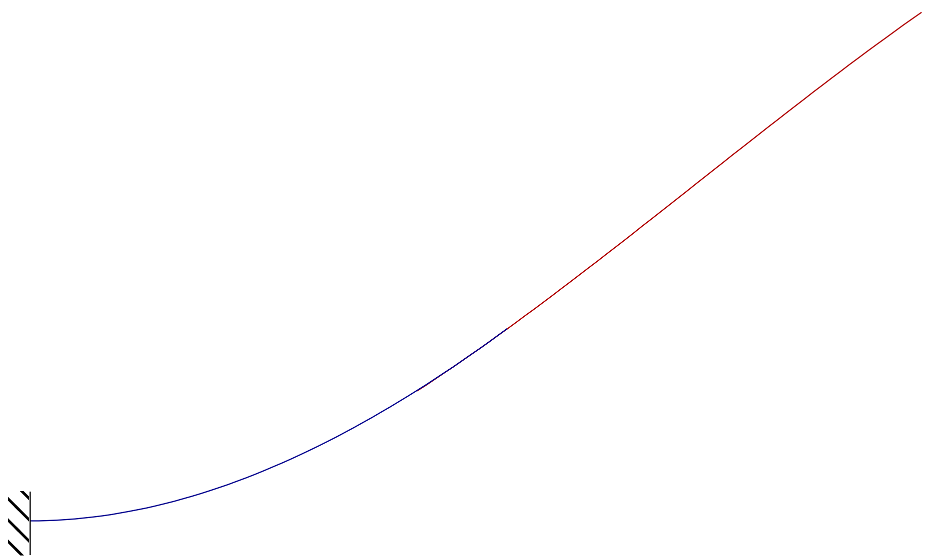
$$x \in [0:L], X = \frac{x}{l} \in [0:1]$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}(-2x^3 + 15Lx^2)$$
$$EIv(x) = \frac{FL^3}{6}\left(-2X^3 + 15X^2\right)$$

$$x \in [l:2l], X = \frac{x}{l} \in [1:2]$$
$$EIv(x) = \frac{F}{6}(-4x^3 + 18Lx^2 - L^3)$$
$$EIv(x) = \frac{FL^3}{6}\left(-4X^3 + 18X^2 - 1\right)$$

Le tracé des 2 courbes adimensionnées donne :



soit une allure de déformée amplifiée par plus de 4 :



Le moment fléchissant est maximum en $x = 0$ et vaut : $\mathbb{M}(0) = 5FL$. La contrainte de tension est maximum en $x = 0$ et $y = \pm\frac{h}{2}$ et vaut :

$$\sigma_M = \frac{5FL}{bh^3} 12 \frac{h}{2} = \frac{30FL}{bh^2} = 252 \text{ MPa} < R_e = 320 \text{ MPa}$$

Le coefficient de sécurité est environ 1.27.

La flèche maximum est en $x \approx 2L$ qui vaut :

$$v(2L) = 39 \frac{FL^3}{6EI} \approx 36.69 \text{ mm}$$

Moment quadratique :

$$I = \frac{bh^3}{12} \approx 33333 \text{ mm}^4$$

---

1)

$$\{\mathcal{V}'1/0\} : \left\{ \begin{array}{cc} a' & u' \\ b' & v' \\ c' & 0 \end{array} \right\}_A \qquad \{\mathcal{V}''1/0\} : \left\{ \begin{array}{cc} a'' & u'' \\ b'' & v'' \\ c'' & 0 \end{array} \right\}_B \qquad \{\mathcal{V}'''1/0\} : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u''' \\ b''' & v''' \\ c''' & 0 \end{array} \right\}_C$$

.... **[0.25]**

2)

$$\vec{V}(C \in 1/0') = \vec{V}(A \in 1/0') + \vec{\Omega}(1/0)' \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' + c'h \\ v' - c'd \\ -a'h + b'd \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{V}(C \in 1/0'') = \vec{V}(B \in 1/0'') + \vec{\Omega}(1/0)'' \wedge \vec{BC} = \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e \\ l \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'' + c''l \\ v'' - c''e \\ -a''l + b''e \end{pmatrix}$$

donc

$$\{\mathcal{V}'1/0\} : \left\{ \begin{array}{cc} a' & u' + c'h \\ b' & v' - c'd \\ c' & -a'h + b'd \end{array} \right\}_C \qquad \{\mathcal{V}''1/0\} : \left\{ \begin{array}{cc} a'' & u'' + c''l \\ b'' & v'' - c''e \\ c'' & -a''l + b''e \end{array} \right\}_C \qquad \{\mathcal{V}'''1/0\} : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u''' \\ b''' & v''' \\ c''' & 0 \end{array} \right\}_C$$

.... **[0.75]**

3)

$$\left\{ \begin{array}{c} a' = a'' = 0 \\ b' = b'' = b'''(= b) \\ c' = c'' = c'''(= c) \\ u' + c'h = u'' + c''l = u''' \\ v' - c'd = v'' - c''e = v''' \\ -a'h + b'd = -a''l + b''e = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} a' = a'' = 0 \\ b' = b'' = b'''(= b) \\ c' = c'' = c'''(= c) \\ u' + ch = u'' + cl = u'''(= u) \\ v' - cd = v'' - ce = v'''(= v) \\ bd = be = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 0 \end{array} \right.$$

Le torseur cinématique de 1 par rapport à 0 prend la forme :

$$\{\mathcal{V}1/0\} : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u \\ 0 & v \\ c & 0 \end{array} \right\}_C$$

.... **[1]**

4) $\{0 \rightarrow 1\} : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_C$ .... **[0.25]**

5)

$$\{0 \rightarrow 1'\} : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z' & 0 \end{array} \right\}_A \qquad \{0 \rightarrow 1''\} : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z'' & 0 \end{array} \right\}_B \qquad \{0 \rightarrow 1'''\} : \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L''' \\ 0 & 0 \\ Z''' & 0 \end{array} \right\}_C$$

.... **[0.75]**

6)

$$\begin{aligned} \vec{M}(C, 1 \rightarrow 0') &= \vec{M}(A, 1 \rightarrow 0') + \vec{F}'_{10} \wedge \vec{AC} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hZ' \\ -dZ' \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{M}(C, 1 \rightarrow 0'') &= \vec{M}(A, 1 \rightarrow 0'') + \vec{F}''_{10} \wedge \vec{AB} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z'' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lZ'' \\ -eZ'' \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les équations du **P.F.S.** sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{c} X_e = 0 \\ Y_e = 0 \\ Z' + Z'' + Z''' + Z_e = 0 \\ hZ' + lZ'' + L''' + L_e = 0 \\ -dZ' - eZ'' + M_e = 0 \\ N_e = 0 \end{array} \right.$$

Il y a 3 mobilités qui impose des conditions sur l'action extérieure ($X_e = Y_e = 0$ et $N_e = 0$).
Il n'y a plus que 3 équations à 4 inconnues Z', Z'', Z''' et L''' : le problème est hyperstatique d'ordre 1.
On peut supprimer une liaison ponctuelle pour la rendre isostatique. .... **[2]**