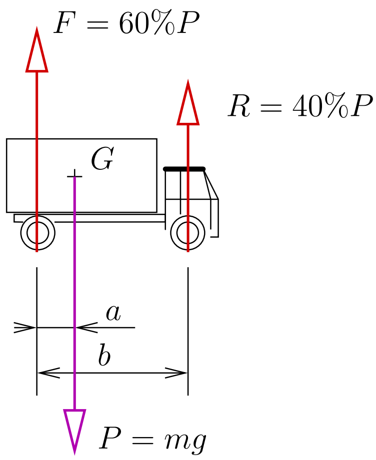
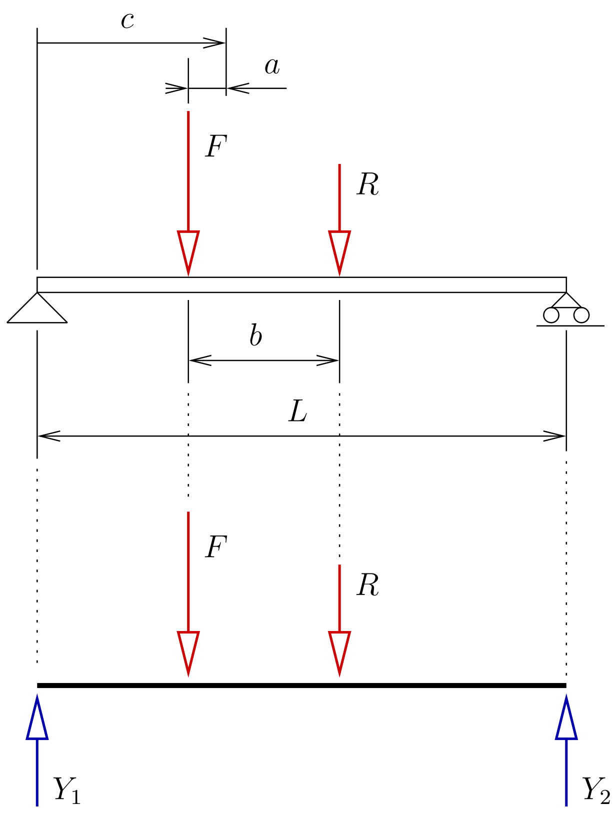
Eléments de correction



En appliquant le **P.F.S.** au camion, on détermine les efforts des roues sur le pont.

$$\begin{cases} F + R = P \\ bR = aP \\ Fb = (b-a)P \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F = \frac{b-a}{b}P = 60\%P \\ R = \frac{a}{b}P = 40\%P \end{cases}$$



On positionne le camion à une distance quelconque c et on applique le **P.F.S.** au pont pour déterminer les actions aux appuis.

$$\begin{cases} -(c-a)F - (c-a+b)R + Y_2 L = 0 \\ -Y_1 L + F(L-c+a) + R(L-c+a-b) = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} Y_2 L = (c-a)F + (c-a+b)R \\ Y_1 L = F(L-c+a) + R(L-c+a-b) \end{cases}$$

donc

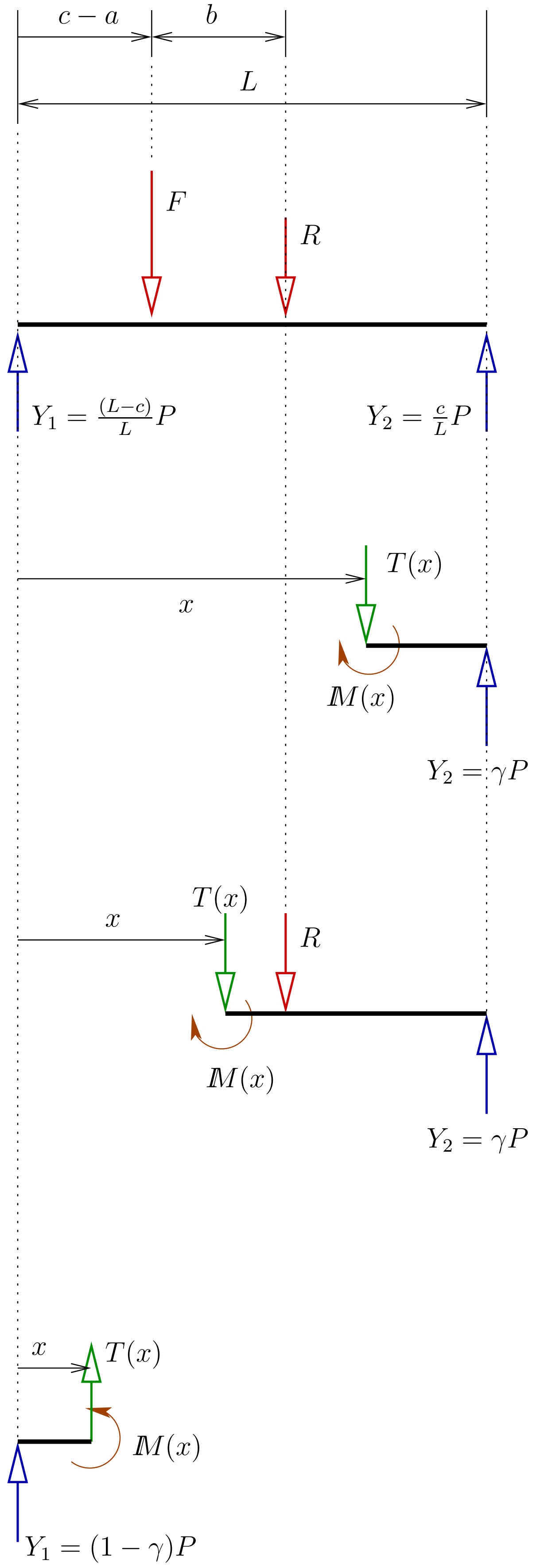
$$\begin{cases} Y_2 L = cP - aP + bR = cP \\ Y_1 L = P(L-c) + Fa + R(a-b) = P(L-c) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} Y_2 = \dfrac{c}{L}P \\ Y_1 = \dfrac{(L-c)}{L}P \end{cases}$$

Ces résultats aurait été les mêmes avec la seule charge P située à c.

Déterminons les efforts intérieurs en notant $\gamma = \frac{c}{L}$:



$$x \in [c-a+b; L]$$

$$\begin{cases} -T + \gamma P = 0 \\ -M + \gamma P(L-x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x) = \gamma P \\ M(x) = \gamma P(L-x) \end{cases}$$

$$x \in [c-a; c-a+b]$$

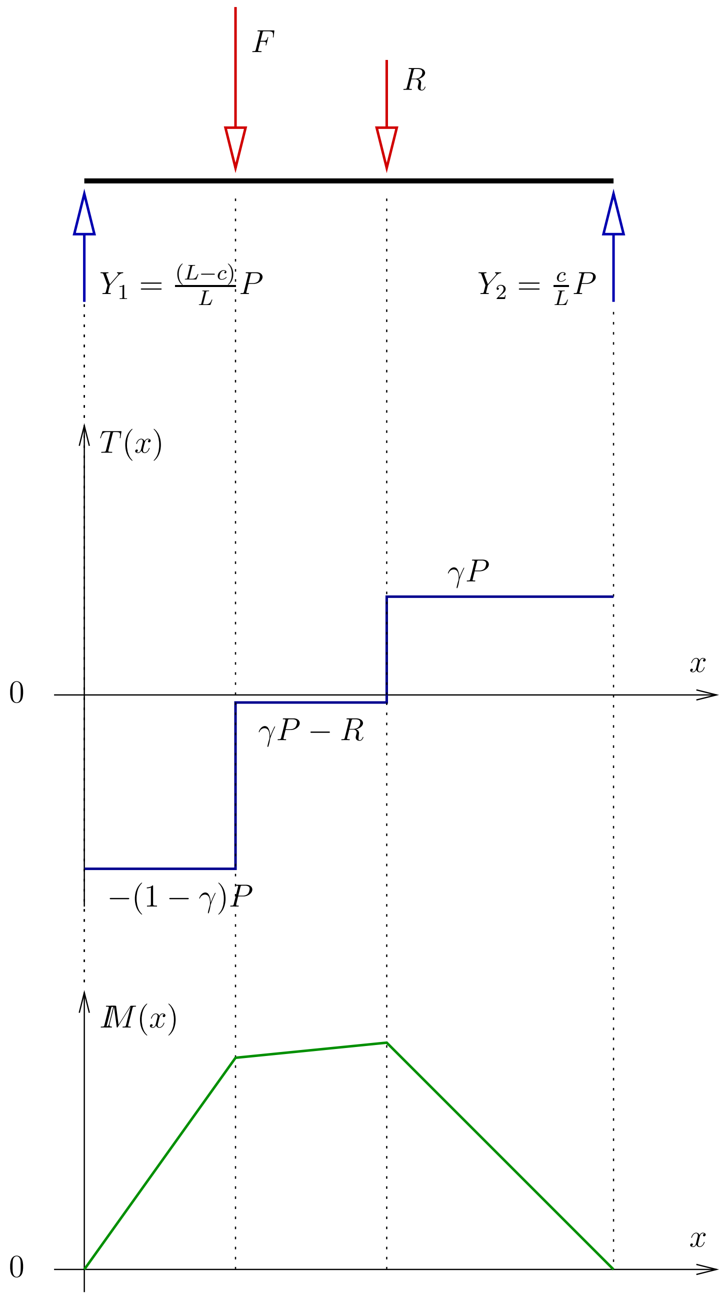
$$\begin{cases} -T - R + \gamma P = 0 \\ -M + \gamma P(L-x) - R(c-a+b-x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x) = \gamma P - R \\ M(x) = \gamma P(L-x) - R(c-a+b-x) \end{cases}$$

$$x \in [0; c-a]$$

$$\begin{cases} T + (1-\gamma)P = 0 \\ M - (1-\gamma)Px = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x) = (\gamma - 1)P \\ M(x) = (1-\gamma)Px \end{cases}$$



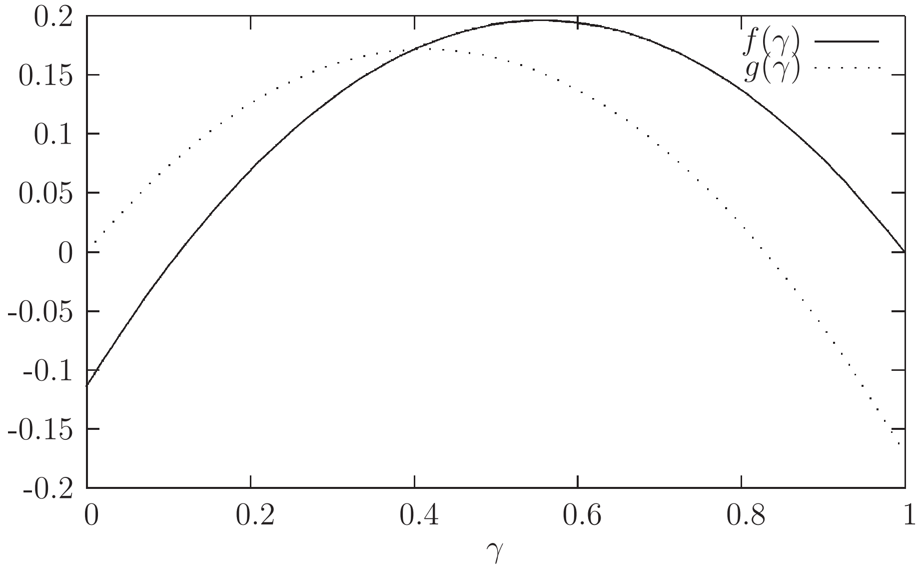
La valeur de l'effort tranchant peut être positive ou négative entre $c-a$ et $c-a+b$. Le moment fléchissant sera alors maxi en $x = c-a$ ou $x = c-a+b$ suivant le cas. Exprimons les moments fléchissants en ces 2 abscisses :

$$
\begin{aligned}
M(x = c-a) &= (1-\gamma)P(c-a) \\
&= (1-\gamma)(\gamma-\alpha)PL \\
\text{avec } \alpha &= \frac{a}{L} = \frac{1.6}{14} = \frac{4}{35}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M(x = c-a+b) &= \gamma(L-c+a-b)P \\
&= \gamma(1-\gamma+\alpha-\beta)PL \\
\text{avec } \beta &= \frac{b}{L} = \frac{4}{14} = \frac{10}{35}
\end{aligned}
$$

Nous avons alors à comparer les 2 fonctions :

$$
\begin{aligned}
f(\gamma) &= (1-\gamma)(\gamma - \frac{4}{35}) \\
g(\gamma) &= \gamma(\frac{29}{35} - \gamma)
\end{aligned}
$$



On pourrait vérifier analytiquement que ces fonctions sont égales pour $\gamma = 0.4$.
On remarque graphiquement que :
- pour $\gamma < 0.4$ on a $g(\gamma) > f(\gamma)$
- pour $\gamma > 0.4$ on a $g(\gamma) < f(\gamma)$

et que $f(\gamma)$ présente un maximum pour γ entre 0.5 et 0.6. Recherchons cette valeur :

$$f'(\gamma) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -(\gamma - \frac{4}{35}) + (1-\gamma) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{39}{35} - 2\gamma = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{39}{70} \approx 0.557$$

Le moment fléchissant sera donc maximum sur la poutre lorsque le camion sera positionné à $c = \frac{39}{70}L$.
Ce moment fléchissant maximum sera en $x = c - a$ et vaudra :

$$\mathbb{M}(x = c-a) = (1-\gamma)(\gamma-\alpha)PL = \left(1 - \frac{39}{70}\right)\left(\frac{39}{70} - \frac{8}{70}\right)PL = \left(\frac{31}{70}\right)^2 PL = 323225 \text{ N.m} = \mathbb{M}_{Max}$$

En considérant que 2 IPN supportent entièrement ce moment maximum, la contrainte maximum subit par la poutre est située en $x = c - a$ et en $y = \pm\frac{h}{2}$ et vaut :

$$\sigma_{Max} = \frac{1}{2}\frac{\mathbb{M}_{Max}}{\frac{I}{y}}$$

Si l'on souhaite ne pas dépasser la limite élastique $R_e = 450$ MPa avec un coefficient de sécurité de 3, il faut que :

$$\sigma_{Max} < \frac{1}{3}R_e \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\mathbb{M}_{Max}}{\frac{I}{y}} < \frac{1}{3}R_e \quad \Longrightarrow \quad \frac{I}{y} > \frac{3\mathbb{M}_{Max}}{2R_e} = 1077418 \text{ mm}^3 \approx 1078 \text{ cm}^3$$

Ce qui impose un "module d'inertie" supérieur à 1078 cm^3 soit le choix d'un IPN 360.

Exercice n°1 – Cinématique [3 pts]

Donnez les torseurs cinématique et d'efforts transmissibles d'

La liaison linéaire rectiligne parfaite d'axe $(A, \vec{z})$ et de normale $(A, \vec{x})$ possède le torseur d'efforts transmissibles :

$$\{\mathcal{T}(S_0 \to S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(S_0 \to S_1) = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \\ \vec{\mathbb{M}}(A, S_0 \to S_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \end{array} \right\} \text{ noté également : } \left\{ \begin{array}{cc} X & 0 \\ 0 & M \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$$

et le torseur cinématique :

$$\{\mathcal{C}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \\ \vec{V}(A \in S_1/S_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \end{array} \right\} \text{ noté également : } \left\{ \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & v \\ c & w \end{array} \right\}_A$$