Exercice n°1 – Flexion

On va écrire 2 équations de moments :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y_2 L + \mathcal{C} + 2FL & = & 0 \\ -Y_1 L + \mathcal{C} + FL & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Y_2 & = & -3F \\ Y_1 & = & 2F \end{array}\right.$$

On effectue 2 coupures pour déterminer les efforts intérieurs :

$x \in [0; L]$

$$\begin{array}{rcl} T(x) & = & -2F \\ \mathbb{M}(x) & = & 2Fx \\ EIv"(x) & = & 2Fx \\ EIv'(x) & = & F\left(x^2 + A\right) \\ EIv(x) & = & F\left(\dfrac{x^3}{3} + Ax + B\right) \end{array}$$

$x \in [L; 2L]$

$$\begin{array}{rcl} T(x) & = & F \\ \mathbb{M}(x) & = & \mathcal{C} + F(2L - x) = F(3L - x) \\ EIv"(x) & = & F(3L - x) \\ EIv'(x) & = & F\left(3Lx - \dfrac{x^2}{2} + D\right) \\ EIv(x) & = & F\left(3L\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + Dx + G\right) \end{array}$$

or les conditions sur la flèche sont :

$$v(0) = 0 \quad ; \quad v(L) = 0 \quad ; \quad v(x) \text{ continue en } L \quad ; \quad v'(x) \text{ continue en } L$$

donc :

$$\left\{\begin{array}{l} B = 0 \\ \frac{L^3}{3} + AL + B = 0 \\ 3L\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{6} + DL + G = 0 \\ 3L^2 - \frac{L^2}{2} + D = L^2 + A \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} L^2 + 3A = 0 \\ 9L^3 - L^3 + 6DL + 6G = 0 \\ 6L^2 - L^2 + 2D = 2L^2 + 2A \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3A = -L^2 \\ 6G = -8L^3 - 6DL \\ 3L^2 + 2D = -\frac{2}{3}L^2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3A = -L^2 \\ 6G = -8L^3 - 6DL \\ 9L^2 + 6D = -2L^2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3A = -L^2 \\ 6G = -8L^3 + 11L^3 = 3L^3 \\ 6D = -11L^2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} A = -\frac{1}{3}L^2 \\ G = \frac{1}{2}L^3 \\ D = -\frac{11}{6}L^2 \end{array}\right.$$

$x \in [0; L] \quad ; \quad X \in [0; 1]$

$$\begin{array}{rcl} EIv(x) & = & F\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3}L^2 x\right) \\ EIv(x) & = & \dfrac{FL^3}{6} 2X\left(X^2 - 1\right) \end{array}$$

$x \in [L; 2L] \quad ; \quad X \in [1; 2]$

$$\begin{array}{rcl} EIv(x) & = & F\left(3L\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{11}{6}L^2 x + \dfrac{1}{2}L^3\right) \\ EIv(x) & = & \dfrac{FL^3}{6}\left(9X^2 - X^3 - 11X + 3\right) \end{array}$$

Il ne reste plus qu'à tracer les 2 fonctions adimensionnées (cf Fig. 2).
La flèche maxi est en $x = 2L$:

$$v(2L) = v(X = 2) = 9\frac{FL^3}{6EI} = \frac{3FL^3}{2EI} = 15.5 \text{ mm}$$

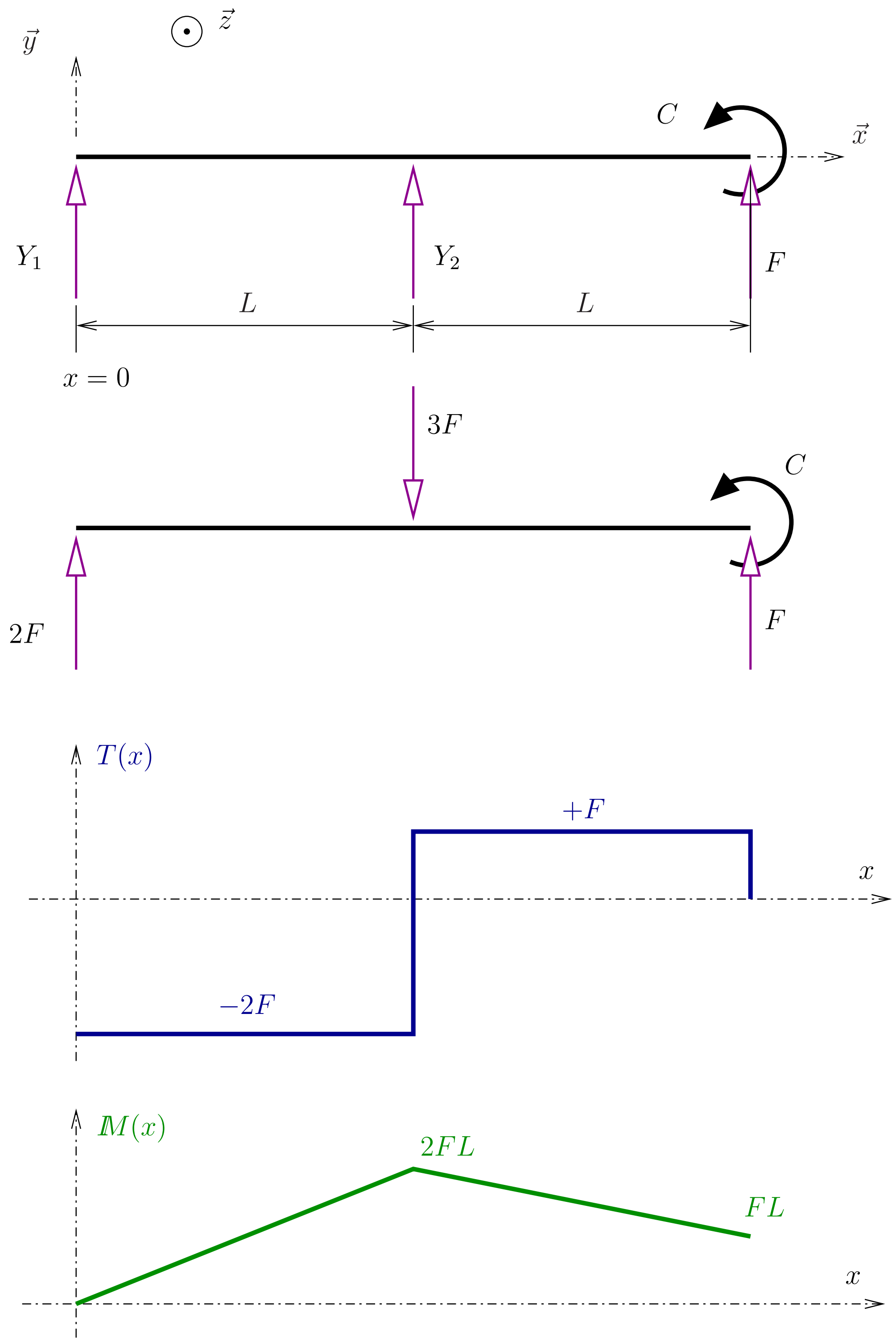

FIG. 1 –

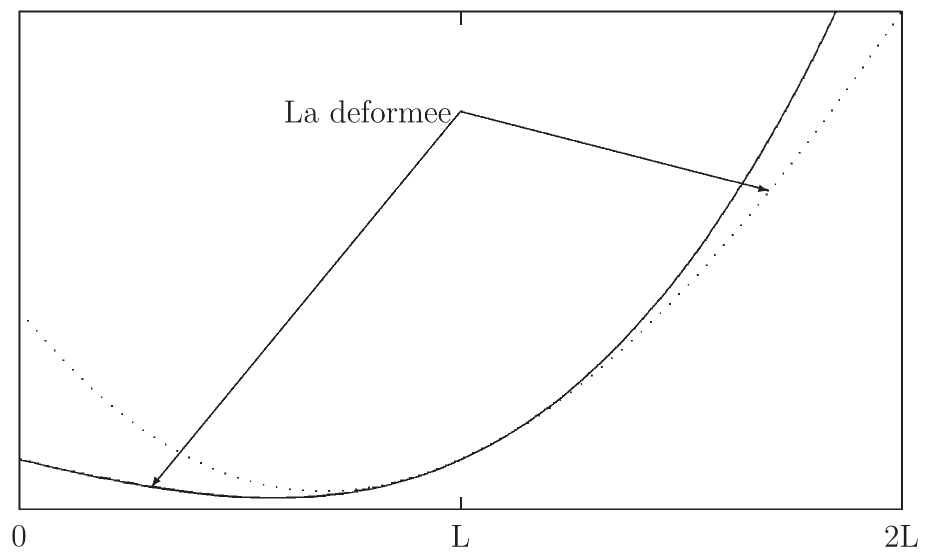

FIG. 2 – Allure de la déformée.

Le moment fléchissant est extrème en $x = L$ et vaut $2FL = 3600$ N.m. La contrainte est maxi en $x = 0$ et pour $y = \pm\frac{h}{2}$ et vaut :

$$\sigma = \frac{2FL}{I}\frac{h}{2} = 288 \text{ MPa} \quad \text{où} \quad I = \frac{bh^3}{12} \approx 312\,500 \text{ mm}^4$$

Les points situés à $y = -\frac{h}{2}$ subissent de la traction ; ceux à $y = +\frac{h}{2}$ de la compression.

La poutre reste dans le domaine élastique : le coefficient de sécurité est $\frac{R_e}{\sigma} = 2$.