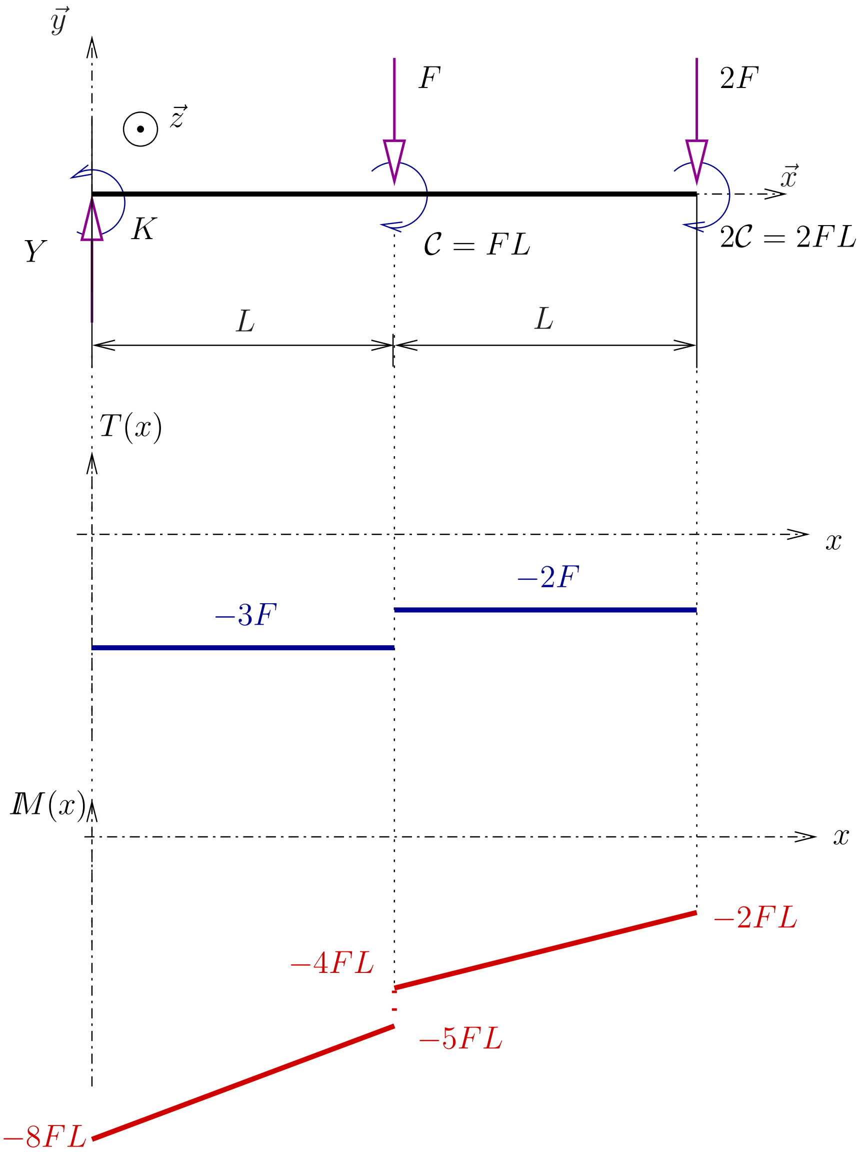
## Exercice n°1 _ Flexion




$$\left\{\begin{array}{rcl} Y - F - 2F & = & 0 \\ K - \mathcal{C} - 2\mathcal{C} - FL - 4FL & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Y & = & 3F \\ K & = & 3\mathcal{C} + 5FL = 8FL \end{array}\right.$$

Action exercée par l'encastrement sur la poutre :

$$\{enc \rightarrow poutre\} : \left\{\begin{array}{l} 3F\vec{y} \\ \vec{M}(O) = 8FL\vec{z} \quad \text{(2880 N.m)} \end{array}\right.$$

$$
\begin{array}{ll}
x \in [0;L]: & \mathbb{M}(x) = -\mathcal{C} - 2\mathcal{C} - F(L-x) - 2F(2L-x) = -3FL - F(L-x) - 2F(2L-x) \\
& \mathbb{M}(x) = -F(8L-3x) \\
& \quad \Longrightarrow \quad EIv"(x) = F(3x-8L) \\
& \quad \Longrightarrow \quad EIv'(x) = F\left(3\frac{x^2}{2} - 8Lx + A\right) \\
& \quad \Longrightarrow \quad EIv(x) = F\left(3\frac{x^3}{6} - 8L\frac{x^2}{2} + Ax + D\right) \\
x \in [L;2L]: & \mathbb{M}(x) = -2\mathcal{C} - 2F(2L-x) = -2FL - 2F(2L-x) \\
& \mathbb{M}(x) = -2F(3L-x) \\
& \quad \Longrightarrow \quad EIv"(x) = 2F(x-3L) \\
& \quad \Longrightarrow \quad EIv'(x) = 2F(\frac{x^2}{2} - 3Lx + B) \\
& \quad \Longrightarrow \quad EIv(x) = 2F(\frac{x^3}{6} - 3L\frac{x^2}{2} + Bx + G)
\end{array}
$$

or les conditions sur la flèche sont :

$$
v(0) = 0 \qquad ; \qquad v'(0) = 0 \qquad ; \qquad v(x) \text{ continue en } L \qquad ; \qquad v'(x) \text{ continue en } L
$$

donc :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
A & = & 0 \\
D & = & 0 \\
\left(3\frac{L^2}{2} - 8L^2 + A\right) & = & 2(\frac{L^2}{2} - 3L^2 + B) \\
\left(3\frac{L^3}{6} - 8L\frac{L^2}{2} + AL + D\right) & = & 2(\frac{L^3}{6} - 3L\frac{L^2}{2} + BL + G)
\end{array}
\right.
$$

$$
\Longrightarrow \quad \left\{
\begin{array}{rcl}
3\frac{L^2}{2} - 8L^2 & = & L^2 - 6L^2 + 2B \\
\frac{L^3}{2} - 4L^3 & = & \frac{L^3}{3} - 3L^3 + 2BL + 2G
\end{array}
\right.
\quad \Longrightarrow \quad \left\{
\begin{array}{rcl}
B & = & -\frac{3}{4}L^2 \\
G & = & \frac{1}{3}L^3
\end{array}
\right.
$$

d'où avec $X = \frac{x}{L}$ :

$$
x \in [0;L] : EIv(x) = F\left(\frac{1}{2}x^3 - 4Lx^2\right)
$$

$$
\Longrightarrow \quad X = \frac{x}{L} \in [0;1] : EIv(X) = \frac{FL^3}{6}\left(3X^3 - 24X^2\right)
$$

$$
x \in [L;2L] : EIv(x) = 2F\left(\frac{x^3}{6} - 3L\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}L^2x + \frac{1}{3}L^3\right)
$$

$$
\Longrightarrow \quad X = \frac{x}{L} \in [1;2] : EIv(X) = \frac{FL^3}{6}\left(2X^3 - 18X^2 - 9X + 4\right)
$$

Il ne reste plus qu'à tracer les 2 fonctions adimensionnées (cf Fig. 1).

La flèche maxi est en $x = 2L$ :

$$
v(2L) = v(X=2) = -70\frac{FL^3}{6EI} = -35\frac{FL^3}{3EI} = -31.17 \text{ mm}
$$

Le moment fléchissant est extrême en $x = O$ et vaut $-8FL = -1440$ N.m. La contrainte est maxi en $x = 0$ et pour $y = \pm\frac{h}{2}$ et vaut :

$$
\sigma = \frac{8FL}{I}\frac{h}{2} = 187.5 \text{ MPa} \quad \text{ où } I = \frac{bh^3}{12} \approx 184320 \text{ mm}^4
$$

Les points situés à $y = +\frac{h}{2}$ subissent de la traction ; ceux à $y = -\frac{h}{2}$ de la compression.

La poutre sortira du domaine élastique (au niveau de $x = 0$ et $y = \pm\frac{h}{2}$) pour $F = \frac{260}{187.5}400 \approx 554.6$ N car alors $\sigma = R_e = 260$ MPa.

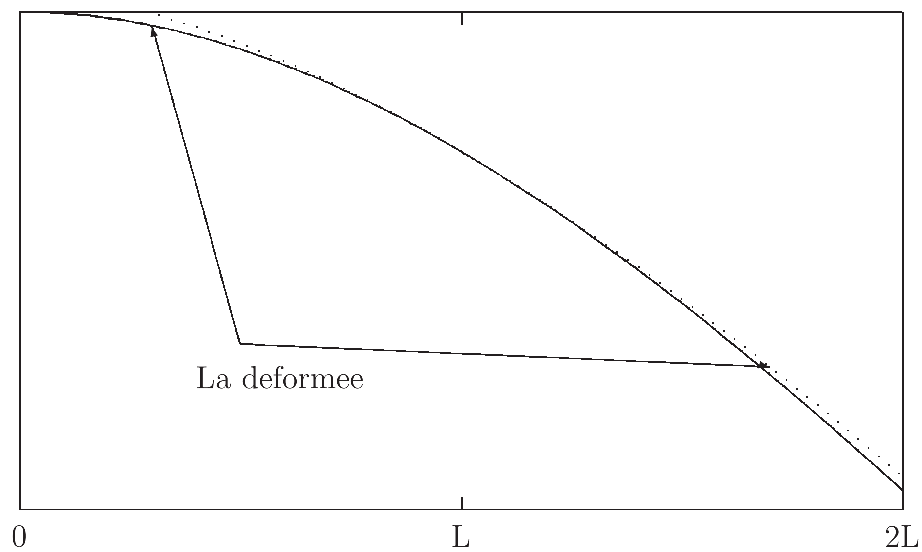



FIG. 1 – Allure de la déformée.

**Exercice n°2 – Torsion**

Ci-dessous, une correction très rapide de ce prolème simple de torsion.
L'action de l'encastrement est $-2\mathcal{C}\vec{x}$.
Le moment de tosion est :

$$\begin{cases} x \in [O; l] & \mathbb{M}_T(x) = 2\mathcal{C} \\ x \in [l; 2l] & \mathbb{M}_T(x) = \mathcal{C} \end{cases}$$

La contrainte maximum de cisaillement aura lieu en $x = 0$ et sur la périphérie de la poutre où $r = \frac{D}{2}$ et vaut :

$$\tau = \frac{\mathbb{M}_T(0)}{I_0}\frac{D}{2} \quad \text{où} \quad I_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = 86431 \text{ mm}^4 \quad \Longrightarrow \quad \tau = \frac{32\mathcal{C}D}{\pi(D^4 - d^4)}$$

Si $\tau = \frac{R_e}{2}$, la poutre sortira de son domaine élastique en $x = 0$ et $r = \frac{D}{2}$ et l'on aura :

$$\frac{R_e}{2} = \frac{32\mathcal{C}D}{\pi(D^4 - d^4)} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C} = \frac{R_e\pi(D^4 - d^4)}{64D} = 280.9 \text{ N.m}$$

La loi de comportement $\mathbb{M}_T(x) = GI_0\alpha'(x)$ permet de calculer la rotation par unité de longueur sur chaque partie de poutre.

$$\begin{cases} x \in [0; l] & \alpha'(x) = 0.233\, 10^{-3} \text{ rd.mm}^{-1} \\ x \in [l; 2l] & \alpha'(x) = 0.117\, 10^{-3} \text{ rd.mm}^{-1} \end{cases}$$

soit un angle de rotation sur chaque partie de poutre

$$\begin{cases} x \in [0; l] & l\alpha'(x) = 0.105 \text{ rd} = 6.03° \\ x \in [l; 2l] & l\alpha'(x) = 0.052 \text{ rd} = 3.01° \end{cases}$$

pour avoir une rotation de la section située en $x = 2l$ de 9.04° lorsque l'on sera à la limite de sortir du domaine élastique à l'encastrement.