Licence L2 - PCSTM - Parcours Mécanique

Examen Résistance des Matériaux

2^{nde} session 2010-2011 _ Durée : 1h45

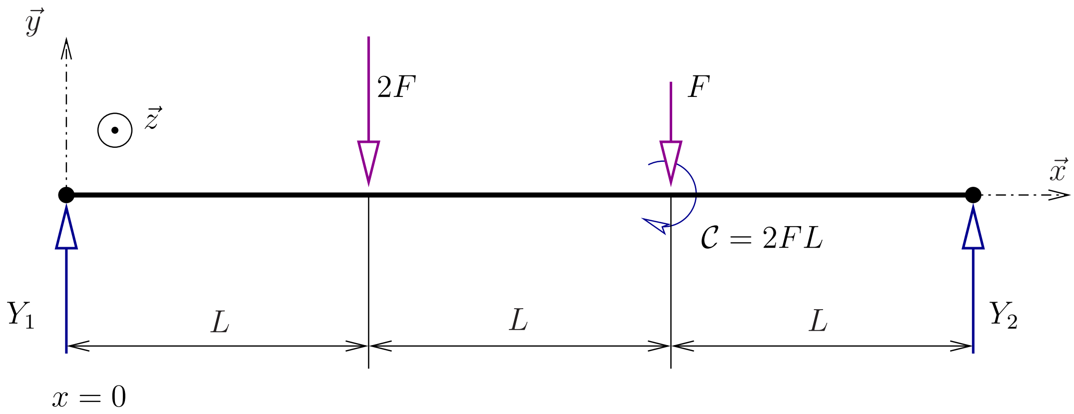
Responsable : L. Blanchard

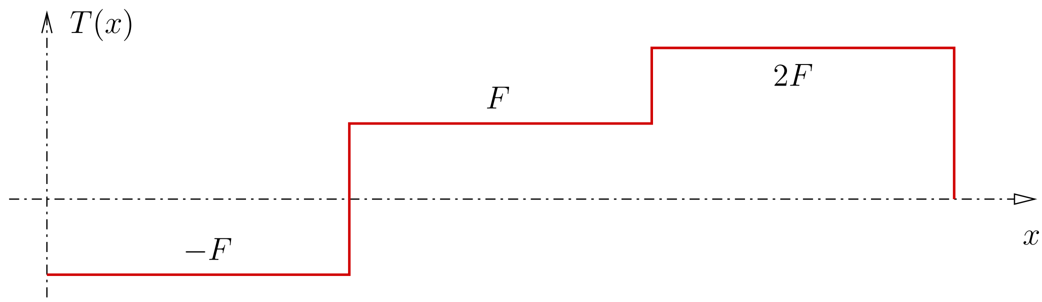
Eléments de correction

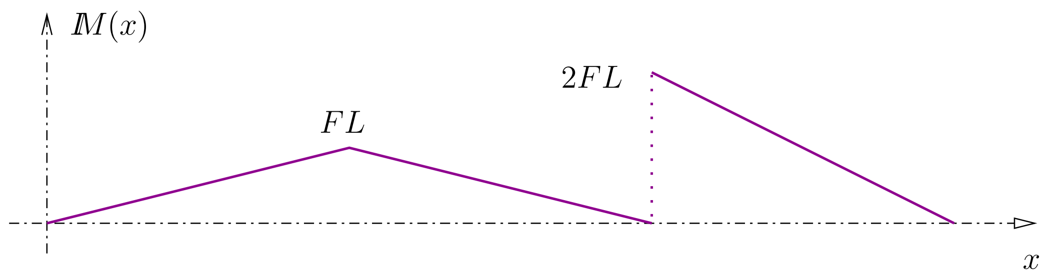
1) Isolons toute la poutre et appliquons l'équation du moment du **P.F.S.** :

$$\text{en } x = 0 : 3Y_2L - 2FL - 2FL - 2FL = 0 \implies Y_2 = 2F = 5000 \text{ N}$$
$$\text{en } x = 3L : -3Y_1L + 4FL + FL - 2FL = 0 \implies Y_1 = F = 2500 \text{ N}$$

On vérifie que $Y_1 + Y_2 - F - 2F = 0$.







2) Isolons des portions de poutre pour déterminer les efforts intérieurs :

$x \in [2L; 3L]$:

$$2F - T = 0 \implies T = 2F$$
$$-\mathbb{M} + 2F(3L - x) = 0 \implies \mathbb{M} = 2F(3L - x)$$

$x \in [L; 2L]$:

$$2F - F - T = 0 \implies T = F$$
$$-\mathbb{M} + 2F(3L - x) - F(2L - x) - 2FL = 0 \implies \mathbb{M} = -Fx + 2FL = F(2L - x)$$

$x \in [0; L]$:

$$F + T = 0 \implies T = -F$$
$$\mathbb{M} - Fx = 0 \implies \mathbb{M} = Fx$$

3) La contrainte de tension maxi :

$$\sigma_{Max} = \frac{2FL}{\frac{bh^3}{12}} \frac{h}{2} = \frac{12FL}{bh^2} = 375 \text{ MPa} < R_e$$

Les points situés à $(x = 2L; y = -\frac{h}{2})$ subissent cette contrainte en traction. Les points situés à $(x = 2L; y = +\frac{h}{2})$ subissent cette contrainte en compression.

On ne sort pas du domaine élastique : le coefficient de sécurité est $440/375 \approx 1.173$.

4)

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$\mathbb{M}(x) = EIv"(x) = Fx$	$\mathbb{M}(x) = EIv"(x) = F(2L - x)$	$\mathbb{M}(x) = EIv"(x) = 2F(3L - x)$
$\frac{EI}{F}v"(x) = x$	$\frac{EI}{F}v"(x) = 2L - x$	$\frac{EI}{F}v"(x) = 6L - 2x$
$\frac{EI}{F}v'(x) = \frac{1}{2}x^2 + A$	$\frac{EI}{F}v'(x) = 2Lx - \frac{1}{2}x^2 + B$	$\frac{EI}{F}v'(x) = 6Lx - x^2 + D$
$\frac{EI}{F}v(x) = \frac{1}{6}x^3 + Ax + G$	$\frac{EI}{F}v(x) = Lx^2 - \frac{1}{6}x^3 + Bx + H$	$\frac{EI}{F}v(x) = \frac{6}{2}Lx^2 - \frac{1}{3}x^3 + Dx + J$

Les 6 conditions sont :

$v(0) = 0$		$v(3L) = 0$
continuité de $v(x)$ en $x = L$		
continuité de $v'(x)$ en $x = L$		
	continuité de $v(x)$ en $x = 2L$	
	continuité de $v'(x)$ en $x = 2L$	

Les 6 conditions donnent :

$$\begin{cases} G = 0 \\ \frac{1}{2}L^2 + A = 2L^2 - \frac{1}{2}L^2 + B \\ 2L(2L) - \frac{1}{2}(2L)^2 + B = 6L(2L) - (2L)^2 + D \\ \frac{1}{6}L^3 + AL + G = LL^2 - \frac{1}{6}L^3 + Bx + H \\ L(2L)^2 - \frac{1}{6}(2L)^3 + Bx + H = \frac{6}{2}L(2L)^2 - \frac{1}{3}(2L)^3 + D(2L) + J \\ \frac{6}{2}L(3L)^2 - \frac{1}{3}(3L)^3 + D(3L) + J = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} G = 0 \\ A = L^2 + B \\ B - 6L^2 = D \\ AL = \frac{2}{3}L^3 + BL + H \\ B(2L) + H = \frac{20}{3}L^3 + D(2L) + J \\ 18L^3 + D(3L) + J = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = L^2 + B & \text{(1)} \\ D = B - 6L^2 & \text{(2)} \\ H = AL - \frac{2}{3}L^3 - BL & \text{(3)} \\ J = 2BL + H - \frac{20}{3}L^3 - 2DL & \text{(4)} \\ J = -18L^3 - 3DL & \text{(5)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A = L^2 + B & \text{(1)} \\ D = B - 6L^2 & \text{(2)} \\ H = L^3 + BL - \frac{2}{3}L^3 - BL & \text{(3)} \\ J = B(2L) + L^3 + BL - \frac{2}{3}L^3 - BL - \frac{20}{3}L^3 - 2BL + 12L^3 & \text{(4)} \\ J = -18L^3 - (3BL - 18L^3) & \text{(5)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{(4)} : J = -\frac{22}{3}L^3 + 13L^3 = \frac{17}{3}L^3 \\ \text{(5)} : \frac{17}{3}L^3 = -18L^3 - 3BL + 18L^3 \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{17}{9}L^2 \\ \text{(1)} : A = L^2 - \frac{17}{9}L^2 = -\frac{8}{9}L^2 \\ \text{(2)} : D = -\frac{17}{9}L^2 - 6L^2 = -\frac{71}{9}L^2 \\ \text{(3)} : H = \frac{1}{3}L^3 \end{cases}$$

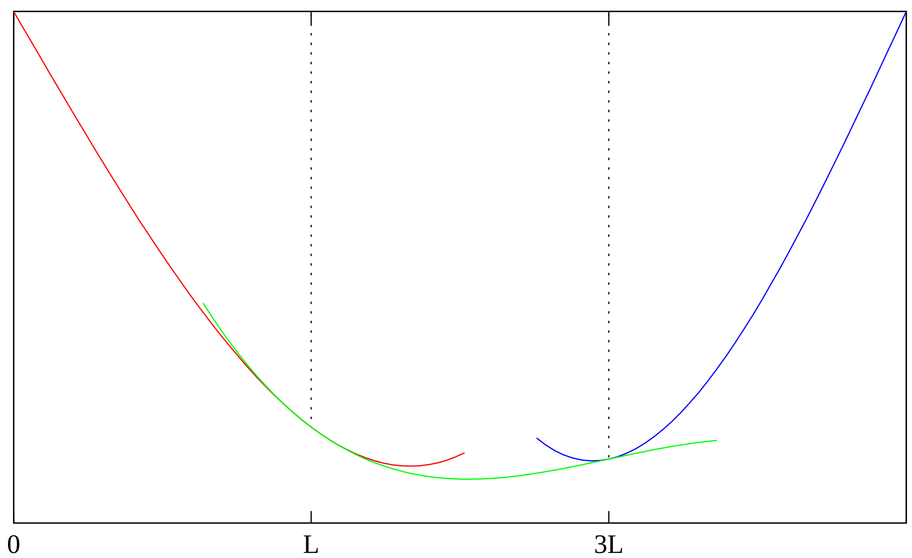
On peut conclure sur les 3 expressions donnant la flèche :

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{8}{9}L^2x\right)$	$v(x) = \frac{F}{EI}\left(Lx^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{17}{9}L^2x + \frac{1}{3}L^3\right)$	$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{6}{2}Lx^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{71}{9}L^2x + \frac{17}{3}L^3\right)$

et en posant $X = \frac{x}{l}$ et $k = \frac{FL^3}{18EI}$

$v(x) = k\left(3X^3 - 16X\right)$	$v(x) = k\left(18X^2 - 3X^3 - 34X + 6\right)$	$v(x) = k\left(54X^2 - 6X^3 - 142X + 102\right)$

Donc voici l'allure de la déformée amplifiée par 96 environ.



La flèche maxi est approximativement pour $x_0 \approx 1.52L$ mais on peut la trouver analytiquement :

$$\text{pour } x \in [L;2L] : \frac{18EI}{FL^3}v'(x) = \left(-9X^2 + 36X - 34\right)$$

$$\text{donc } v'(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 1296 - 1224 = 72 \quad \Longrightarrow \quad X_0 = \frac{-36 \pm \sqrt{72}}{-18} = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 1.5286L$$

et la flèche maxi est :

$$v(x_0) = \frac{FL^3}{18EI}\left(18{X_0}^2 - 3{X_0}^3 - 34X_0 + 6\right) \approx -14.6285\frac{FL^3}{18EI} = -5.805 \text{ mm}$$