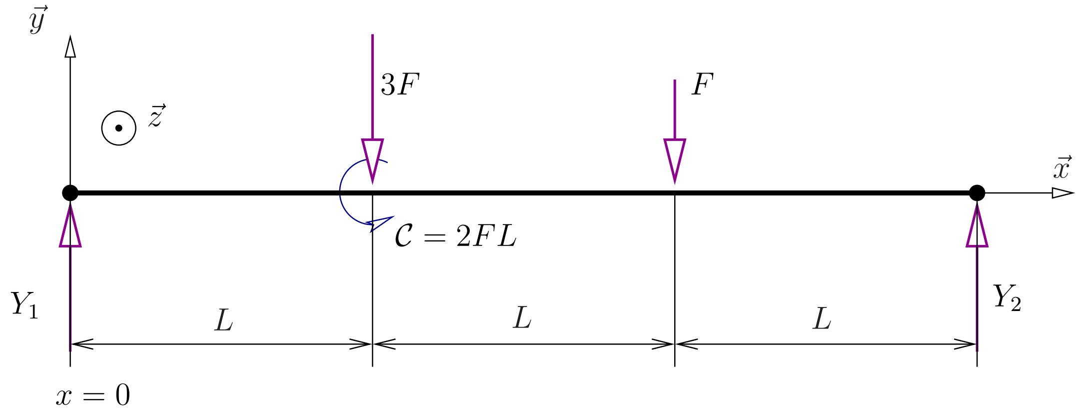
Licence L2 - PCSTM - Parcours Mécanique
Examen Résistance des Matériaux
saison 2009-2010 _ Durée : 1h30
Responsable : L. Blanchard _ sujet de 1 page
Eléments de correction

Isolons toute la poutre et appliquons l'équation du moment du **P.F.S.** :



$$\text{en } x = 0 : 3Y_2L - 2FL - 3FL + 2FL = 0 \quad \Longrightarrow \quad Y_2 = F = 500 \text{ N}$$
$$\text{en } x = 3L : -3Y_1L + 3F2L + FL + 2FL = 0 \quad \Longrightarrow \quad Y_1 = 3F = 1500 \text{ N}$$

On vérifie que $Y_1 + Y_2 - F - 3F = 0$.

Isolons des portions de poutre pour déterminer les efforts intérieurs :

$x \in [2L; 3L]$:

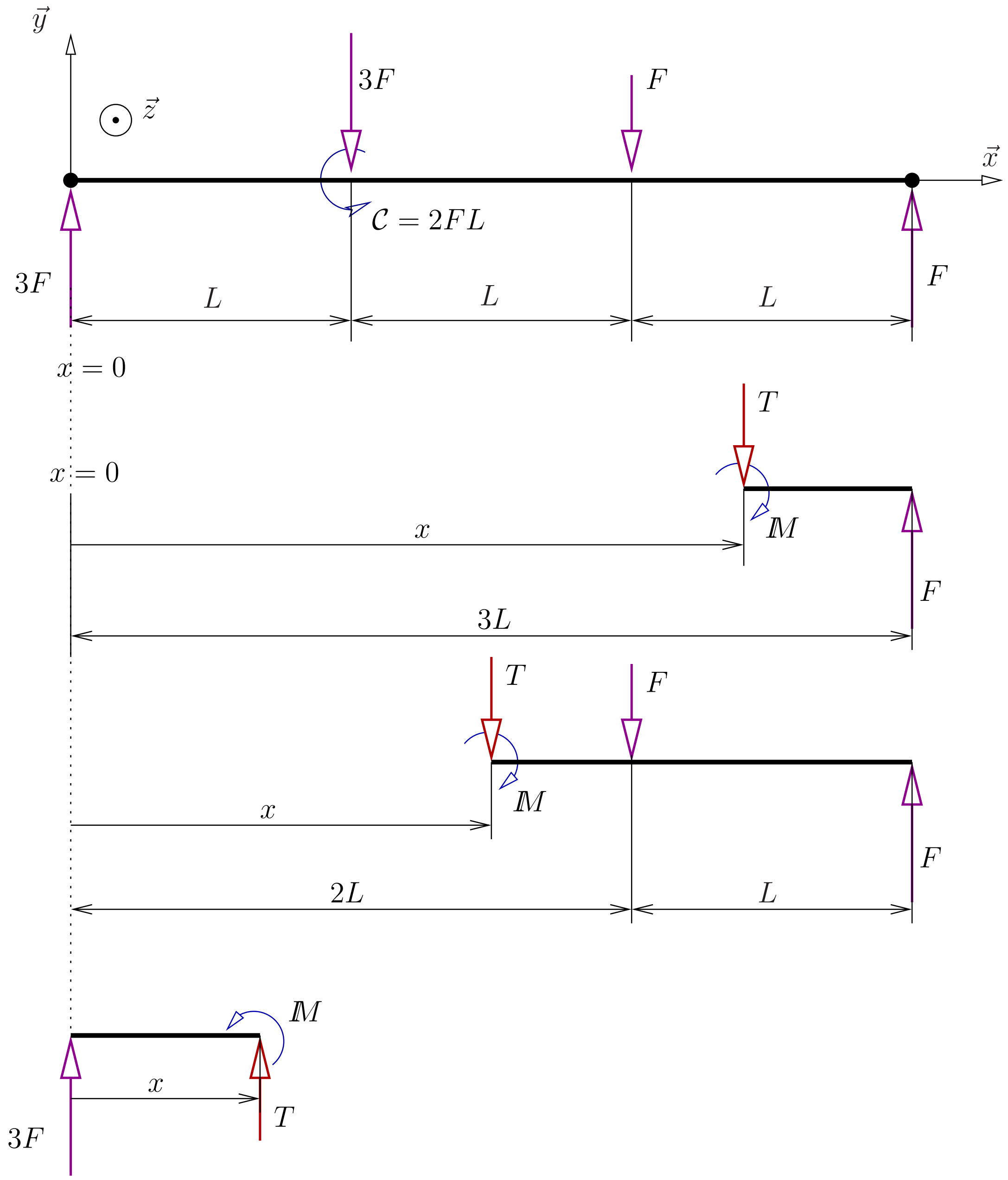
$$F - T = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = F$$
$$-\mathbb{M} + F(3L - x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{M} = F(3L - x)$$

$x \in [L; 2L]$:

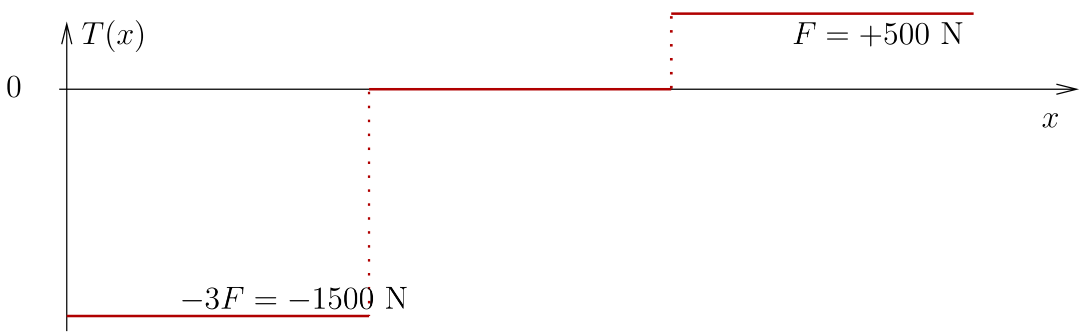
$$F - F - T = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = 0$$
$$-\mathbb{M} + F(3L - x) - F(2L - x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{M} = FL$$

$x \in [0; L]$:

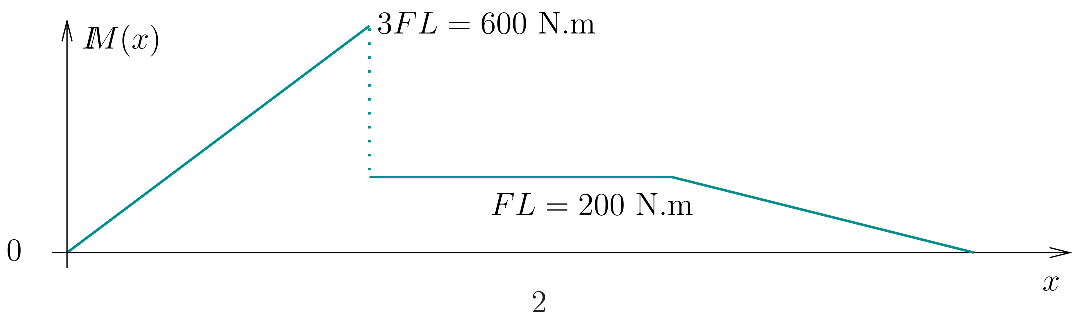
$$3F + T = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = -3F$$
$$\mathbb{M} - 3Fx = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{M} = 3Fx$$



$\vec{y}$
$3F$
F
$\vec{z}$
$\vec{x}$
$\mathcal{C} = 2FL$
$3F$
L
L
L
F
$x = 0$
T
$x = 0$
$I\!M$
x
F
$3L$
T
F
x
$I\!M$
$2L$
L
F
$I\!M$
x
T
$3F$



$T(x)$
0
$F = +500$ N
x
$-3F = -1500$ N



$I\!M(x)$
$3FL = 600$ N.m
$FL = 200$ N.m
0
x

$$\sigma_{Max} = \frac{3FL}{\frac{bh^3}{12}}\frac{h}{2} = \frac{18FL}{bh^2} = 112.5 \text{ MPa} < R_e$$

Les points situés à $(x = L; y = -\frac{h}{2})$ subissent cette contrainte en traction. Les points situés à $(x = L; y = +\frac{h}{2})$ subissent cette contrainte en compression.

On ne sort pas du domaine élastique : le coefficient de sécurité est seulement $550/112.5 \approx 4.88$.

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$M(x) = EIv"(x) = 3Fx$	$M(x) = EIv"(x) = FL$	$M(x) = EIv"(x) = F(3L - x)$
$\frac{EI}{F}v"(x) = 3x$	$\frac{EI}{F}v"(x) = L$	$\frac{EI}{F}v"(x) = 3L - x$
$\frac{EI}{F}v'(x) = \frac{3}{2}x^2 + A$	$\frac{EI}{F}v'(x) = Lx + B$	$\frac{EI}{F}v'(x) = 3Lx - \frac{1}{2}x^2 + D$
$\frac{EI}{F}v(x) = \frac{1}{2}x^3 + Ax + G$	$\frac{EI}{F}v(x) = \frac{L}{2}x^2 + Bx + H$	$\frac{EI}{F}v(x) = \frac{3}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3 + Dx + J$

Les 6 conditions sont :

$v(0) = 0$		$v(3L) = 0$

continuité de $v(x)$ en $x = L$

continuité de $v'(x)$ en $x = L$

continuité de $v(x)$ en $x = 2L$

continuité de $v'(x)$ en $x = 2L$

Les 6 conditions donnent :

$$\begin{cases} G = 0 \\ \frac{3}{2}L9L^2 - \frac{1}{6}27L^3 + 3DL + J = 0 \\ \frac{1}{2}L^3 + AL + G = \frac{L}{2}L^2 + BL + H \\ \frac{3}{2}L^2 + A = L^2 + B \\ \frac{L}{2}4L^2 + B2L + H = \frac{3}{2}L4L^2 - \frac{1}{6}8L^3 + D2L + J \\ L2L + B = 3L2L - \frac{1}{2}4L^2 + D \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} G = 0 \\ \frac{27}{2}L^3 - \frac{27}{6}L^3 + 3DL + J = 0 \\ AL = BL + H \\ \frac{1}{2}L^2 + A = B \\ 2L^3 + 2BL + H = 6L^3 - \frac{4}{3}L^3 + 2DL + J \\ B = 2L^2 + D \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} G = 0 & (1) \\ 54L^3 + 18DL + 6J = 0 & (2) \\ AL = BL + H & (3) \\ L^2 + 2A = 2B & (4) \\ 6BL + 3H = 8L^3 + 6DL + 3J & (5) \\ B = 2L^2 + D & (6) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (3) \Longrightarrow H = (A - B)L = (\frac{3}{2}L^2 + D - 2L^2 - D)L = -\frac{1}{2}L^3 \\ (4) \Longrightarrow 2A = 2B - L^2 = 4L^2 + 2D - L^2 = 3L^2 + 2D \end{cases}$$

donc $(5) \Longrightarrow 6(2L^2 + D)L - \frac{3}{2}L^3 = 8L^3 + 6DL + 3J$

$$\Longrightarrow \quad 12L^3 + 6DL - \frac{3}{2}L^3 = 8L^3 + 6DL + 3I \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{2}L^3 = 3I \quad \Longrightarrow \quad J = \frac{5}{6}L^3$$

(2) $$\Longrightarrow \quad 54L^3 + 18DL + 5L^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{59}{18}L^2$$

(6) $$\Longrightarrow \quad B = 2L^2 + D = 2L^2 - \frac{59}{18}L^2 = -\frac{23}{18}L^2$$

(3) $$\Longrightarrow \quad A = -\frac{23}{18}L^2 - \frac{1}{2}L^2 = -\frac{32}{18}L^2$$

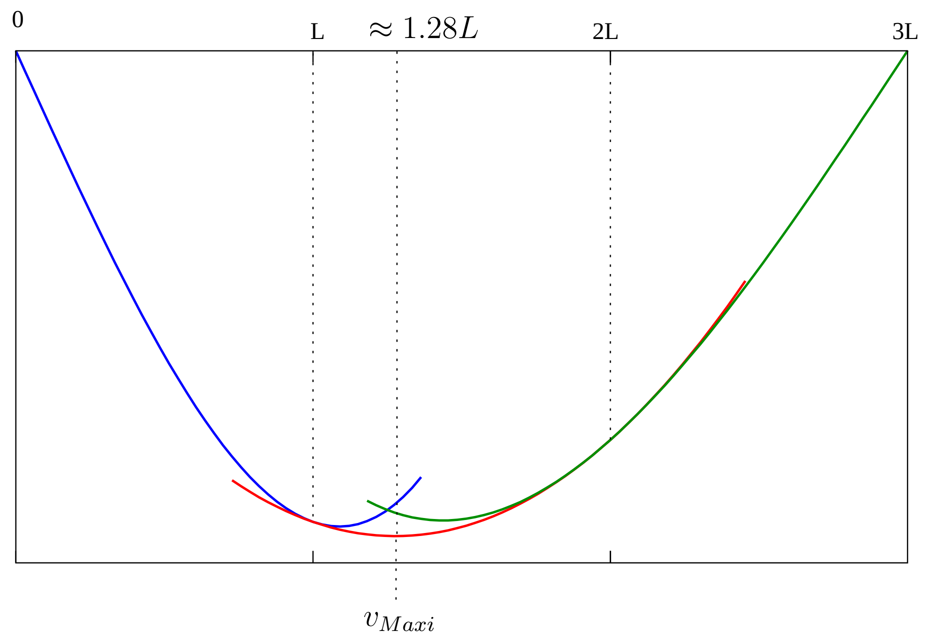
On peut conclure sur les 3 expressions donnant la flèche :

$x \in [0; L]$	$x \in [L; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$
$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{32}{18}L^2 x\right)$	$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{L}{2}x^2 - \frac{23}{18}L^2 x - \frac{1}{2}L^3\right)$	$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{3}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{59}{18}L^2 x + \frac{5}{6}L^3\right)$

et en posant $X = \frac{x}{l}$

$v(x) = \frac{FL^3}{18EI}\left(9X^3 - 32X\right)$	$v(x) = \frac{FL^3}{18EI}\left(9X^2 - 23X - 9\right)$	$v(x) = \frac{FL^3}{18EI}\left(27X^2 - 3X^3 - 59X + 15\right)$

Donc voici l'allure de la déformée amplifiée par 27 environ.



La flèche maxi est approximativement pour $x_0 \approx 1.28L$ mais on peut la trouver analytiquement :

$$\text{pour } x \in [L; 2L] : \frac{EI}{F}v'(x) = Lx - \frac{23}{18}L^2 \text{ donc } v'(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{23}{18}L \approx 1.277L$$

et la flèche maxi est :

$$v(x_0) = \frac{FL^3}{18EI}\left(9{X_0}^2 - 23X_0 - 9\right) = \frac{FL^3}{18EI}\left(9\left(\frac{23}{18}\right)^2 - 23\frac{23}{18} - 9\right) = -\frac{853FL^3}{648EI} = -24.07 \text{ mm}$$