Licence L2 - PCSTM - Parcours Mécanique

Examen Résistance des Matériaux

2^{nde} session 2009-2010 _ Durée : 1h15

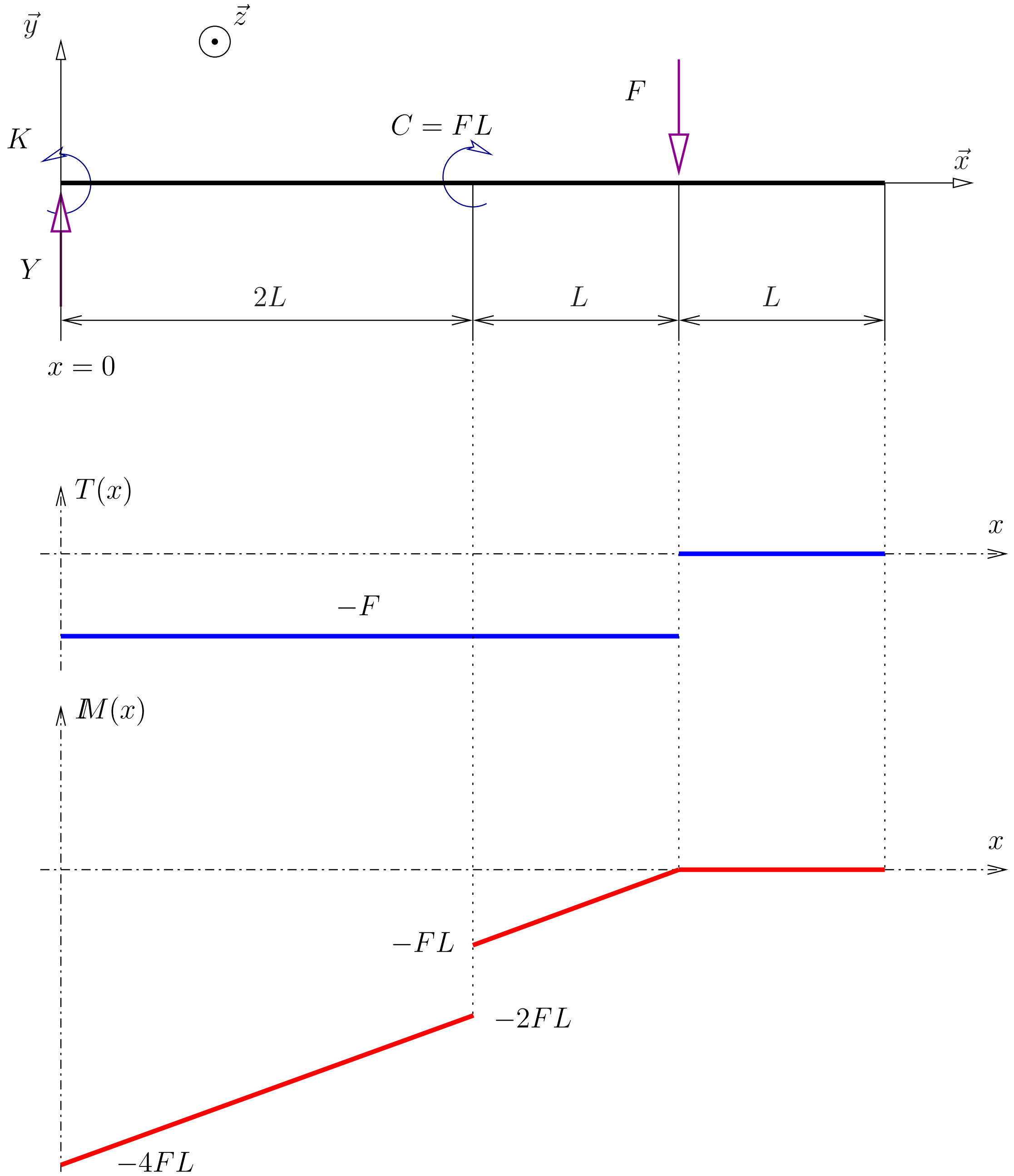
Responsable : L. Blanchard

Eléments de correction

Isolons toute la poutre et appliquons le **P.F.S.** :

$$Y - F = 0 \implies Y = F$$

$$\text{moment en } x = 0 : -3FL - C + K = 0 \implies K = 3FL + FL = 4FL$$



Isolons des portions de poutre pour déterminer les efforts intérieurs :

$x \in [3L; 4L]$:

$$T(x) = 0$$
$$\mathbb{M}(x) = 0$$

$x \in [2L; 3L]$:

$$-F - T = 0 \implies T(x) = -F$$
$$-\mathbb{M} - F(3L - x) = 0 \implies \mathbb{M} = F(x - 3L)$$

$x \in [0; 2L]$:

$$-F - T = 0 \implies T(x) = -F$$
$$-\mathbb{M} - F(3L - x) - C = 0 \implies \mathbb{M} = F(x - 3L) - FL = F(x - 4L)$$

La contrainte de tension maxi est en $x = 0$ et vaut :

$$\sigma_{Max} = \frac{4FL}{\frac{bh^3}{12}}\frac{h}{2} = \frac{24FL}{bh^2} = 288 \text{ MPa} < R_e$$

Les points situés à $(x = 0; y = +\frac{h}{2})$ subissent cette contrainte en traction. Les points situés à $(x = 0; y = -\frac{h}{2})$ subissent cette contrainte en compression.

On ne sort pas du domaine élastique : le coefficient de sécurité est $550/288 \approx 1.9$.

Déterminons la flèche :

$x \in [0; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$	$x \in [3L; 4L]$
$\mathbb{M}(x) = EIv''(x) = F(x - 4L)$	$\mathbb{M}(x) = EIv''(x) = F(x - 3L)$	$\mathbb{M}(x) = EIv''(x) = 0$
$\frac{EI}{F}v''(x) = x - 4L$	$\frac{EI}{F}v''(x) = x - 3L$	$\frac{EI}{F}v''(x) = 0$
$\frac{EI}{F}v'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4Lx + A$	$\frac{EI}{F}v'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3Lx + B$	$\frac{EI}{F}v'(x) = D$
$\frac{EI}{F}v(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2Lx^2 + Ax + G$	$\frac{EI}{F}v(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}Lx^2 + Bx + H$	$\frac{EI}{F}v(x) = Dx + J$

Les 6 conditions sont :

$v(0) = 0$ et $v'(0) = 0$

continuité de $v(x)$ en $x = 2L$

continuité de $v'(x)$ en $x = 2L$

continuité de $v(x)$ en $x = 3L$

continuité de $v'(x)$ en $x = 3L$

Les 6 conditions donnent :

$$\begin{cases} A = 0 \\ G = 0 \\ \frac{1}{2}(2L)^2 - 4L(2L) + A = \frac{1}{2}(2L)^2 - 3L(2L) + B \\ \frac{1}{6}(2L)^3 - 2L(2L)^2 + A(2L) + G = \frac{1}{6}(2L)^3 - \frac{3}{2}L(2L)^2 + B(2L) + H \\ \frac{1}{2}(3L)^2 - 3L(3L) + B = D \\ \frac{1}{6}(3L)^3 - \frac{3}{2}L(3L)^2 + B(3L) + H = D(3L) + J \end{cases}$$

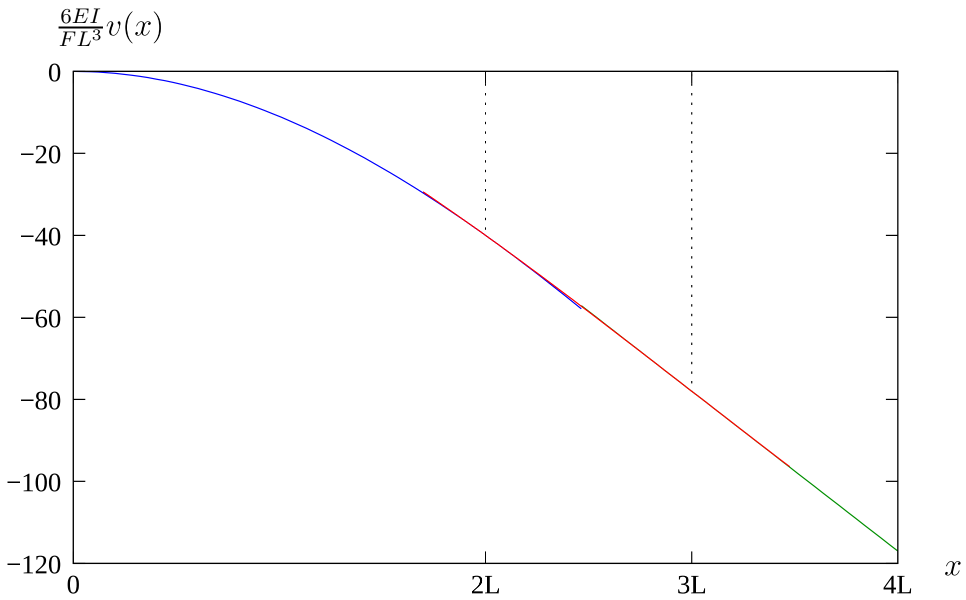
$$\Longrightarrow \begin{cases} A=0 \\ G=0 \\ -2L^2 = B \\ -8L^3 = -6L^3 + 2BL + H \\ 9L^2 - 18L^2 + 2B = 2D \\ 9L^3 - 27L^3 + 6BL + 2H = 6DL + 2J \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A=0 \\ G=0 \\ B = -2L^2 \\ -2L^3 = -4L^3 + H \\ 9L^2 - 18L^2 - 4L^2 = 2D \\ 9L^3 - 27L^3 - 12L^3 + 2H = 6DL + 2J \end{cases} \qquad \Longrightarrow \begin{cases} A=0 \\ G=0 \\ B = -2L^2 \\ H = 2L^3 \\ 2D = -13L^2 \\ 2J = 13L^3 \end{cases}$$

On peut conclure sur les 3 expressions donnant la flèche :

$x \in [0; 2L]$	$x \in [2L; 3L]$	$x \in [3L; 4L]$
$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{6}x^3 - 2Lx^2\right)$	$v(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}Lx^2 - 2L^2x + 2L^3\right)$	$v(x) = \frac{F}{2EI}\left(-13L^2x + 13L^3\right)$
	et en posant $X = \frac{x}{l}$	
$v(x) = \frac{FL^3}{6EI}\left(X^3 - 12X^2\right)$	$v(x) = \frac{FL^3}{6EI}\left(X^3 - 9X^2 - 12X + 12\right)$	$v(x) = \frac{FL^3}{6EI}\left(-39X + 39\right)$

Donc voici l'allure de la déformée amplifiée par 18 environ.



La flèche maxi est en $x = 4L$ ($X = 4$) et vaut :

$$v(4L) = \frac{FL^3}{6EI}(-4+1)39 = -\frac{39FL^3}{2EI} = -66.8 \text{ mm}$$