
A plusieurs reprises, dans cette correction, je vais écrire que le poids doit compensée la poussée d'Archimède, encore faut il bien préciser ce poids et cette poussée d'Archimède. L'accélération de la pesanteur se simplifie et l'on peut alors travailler avec les masses.

La longueur du radeau est : $10L + e = 3607.5$ mm.

Déterminons le volume V de bambou d'un chaume ; On peut décomposer le volume de bambou de différentes manières :

- $V = V_1 + 11V_2$ où V_1 est le volume du tube et V_2 le volume d'une cloison intérieure au tube.

$$V_1 = (10L + e)\frac{\pi}{4}\left(D^2 - (D - 4e)^2\right) \qquad \text{et} \qquad V_2 = e\frac{\pi}{4}(D - 4e)^2$$

- $V = 10V_1' + 11V_2'$ où V_1' est le volume d'une portion de tube et V_2' le volume d'une cloison jusqu'au diamètre extérieur.

$$V_1' = (L - e)\frac{\pi}{4}\left(D^2 - (D - 4e)^2\right) \qquad \text{et} \qquad V_2' = e\frac{\pi}{4}D^2$$

- $V = V_e - 10V_3$ où V_e est le volume extérieur du chaume et V_3 le volume d'une cavité entre 2 cloisons.

$$V_e = \frac{\pi}{4}D^2(10L + e) \qquad \text{et} \qquad V_3 = (L - e)\frac{\pi}{4}(D - 4e)^2$$

Dans les 3 cas, il est inutile de développer analytiquement l'expression de V qui donne numériquement $V \approx 12.98$ l.

La masse d'un chaume est alors : $m = \rho' V = 4.544$ kg.

Le volume extérieur V_e du chaume est :

$$V_e = \frac{\pi}{4}D^2(10L + e) \approx 22.95 \text{ l}$$

La poussée d'Archimède P_A subie par un chaume totalement immergé est :

$$P_A = \rho V_e g \approx 230.77 \text{ N} \quad \Longrightarrow \quad \frac{P_A}{g} = 23.524 \text{ kg}$$

La masse m' supportable par un chaume totalement immergé (à la limite de la flottaison) est telle que :

$$(m' + m)g = P_A \quad \Longrightarrow \quad m' = \frac{P_A}{g} - m = 18.980 \text{ kg}$$

La poussée d'Archimède subie par un chaume à moitié immergé est

$$\frac{1}{2}P_A \approx 115.38 \text{ N}$$

On a numériquement $\frac{1}{2}\frac{P_A}{g} \approx 11.76$ kg.
La masse supportable par un chaume à moitié immergé est alors

$$m'' = \frac{P_A}{2g} - m = 7.218 \text{ kg}$$

La masse à supporter par le radeau étant $M = 100$ kg. On a $\frac{M}{m''} \approx 13.8$. Il faut donc au minimum **14** chaumes pour que tous les chaumes soit à moins de la moitié immergés.

La masse du radeau est $14m = 63.62$ kg. La largeur du radeau est : $14D = 1260$ mm.

La poussée d'Archimède subie par le radeau à moitié immergé fournit la valeur :

$$14\frac{P_A}{2g} = 164.67 \text{ kg}$$

La masse supplémentaire ΔM supportable par le radeau pour que les chaumes soit à moitié immergés est donnée par :

$$M + \Delta M = 14\frac{P_A}{2g} - 14m = 14m\text{"} \quad \Longrightarrow \quad \Delta M = 1.048 \text{ kg}$$

La masse supplémentaire $\Delta M'$ supportable par le radeau pour que les chaumes soit totalement immergés est donnée par :

$$M + \Delta M' = 14\frac{P_A}{g} - 14m = 14m' \quad \Longrightarrow \quad \Delta M' = 165.71 \text{ kg}$$

Les chaumes étant tous remplis d'eau, le volume déplacé par 1 chaume est alors V. Un chaume totalement immergé subit la poussée d'Archimède $\rho V g = 130$ N ($\rho V = 13.31$ kg). On a pour tout le radeau chargé de $M + \Delta M''$ et à la limite de flottaison :

$$(M + \Delta M'' + 14m)g = 14\rho V g \quad \Longrightarrow \quad M + \Delta M'' + 14\rho' V = 14\rho V$$
$$\Longrightarrow \quad M + \Delta M'' = 14(\rho - \rho')V = 122.69 \text{ kg} \quad \Longrightarrow \quad \Delta M'' = 22.69 \text{ kg}$$

Le radeau flotte encore et peut supporter, à la limite de la flottaison, 122.69 kg soit 22.69 kg supplémentaire.

La masse d'eau à l'intérieur des 14 chaumes est $m_{eau} = \rho(V_e - V) = 143$ kg. Elle est inférieure à $\Delta M'$. Il s'avère qu'analytiquement $\Delta M'' = \Delta M' - m_{eau}$. Ce calcul a été accepté bien que mal choisit.

L'énoncé ne fournissait pas la masse volumique de l'air ($\rho_a = 1.2$ kg.m^{-3}). Cette donnée aurait pû permettre de calculer la masse d'air interne à 1 chaume (non percé) soit $m_{air} = \rho_a(V_e - V) = 11.9$ g. Nous avons négligé cette masse qui représente 0.25 % de m : la masse m du chaume devrait être 4.556 kg.