La poussée d'Archimède (celle dûe à l'air est négligée) est déterminée à partir du volume V d'eau déplacé : .... **[0.25]**

$$P_A = \rho V g$$

Cette poussée compense le poids du bateau chargé : .... **[0.25]**

$$P_A = (M+m)g$$

Dans le 1^er^ cas où $(M+m)$ est suffisament faible, le volume d'eau de mer déplacé est :

$$V = 2S_1 L \quad \text{avec} \quad S_1 = \frac{1}{2}tc \quad \text{avec} \quad c = t\tan(60°) = t\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad V = t^2\sqrt{3}L$$

et l'on écrit : .... **[0.5]**

$$(M+m) = \rho t^2\sqrt{3}L \quad \text{si } t < d \quad \text{donc si} \quad t < \frac{b}{\sqrt{3}}$$

.... **[0.5]**

Dans le 2^nd^ cas où $M+m$ est plus important, le volume d'eau de mer déplacé est :

$$V = 2(S_2+S_3+S_4)L \quad \text{avec} \quad S_2 = \frac{1}{2}bd \quad \text{avec} \quad d = \frac{b}{\tan(60°)} = \frac{b}{\sqrt{3}} = b\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Longrightarrow \quad S_2 = \frac{1}{2}b^2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{et} \quad S_3 = b(t-d) = b\left(t - b\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{et} \quad S_4 = \frac{1}{2}a(t-d) \quad \text{avec} \quad a = (t-d)\tan(30°) = (t-d)\frac{\sqrt{3}}{3} = \left(t-b\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S_4 = \frac{1}{2}\left(t-b\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad V = \left[b^2\frac{\sqrt{3}}{3} + 2b\left(t-b\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(t-b\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]L$$

.... **[1]**

en notant $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$\begin{aligned}
V &= \left[b^2k + 2b\,(t-bk) + (t-bk)\,k\,(t-bk)\right]L \\
&= \left[kb^2 + 2bt - 2kb^2 + k(t^2 - 2bkt + k^2b^2)\right]L \\
&= \left[2bt - kb^2 + kt^2 - 2bk^2t + k^3b^2\right]L \\
&= \left[(k^3-k)b^2 + 2b(1-k^2)t + kt^2\right]L \\
&= \left[-\frac{2\sqrt{3}}{9}b^2 + \frac{4}{3}bt + \frac{\sqrt{3}}{3}t^2\right]L
\end{aligned}$$

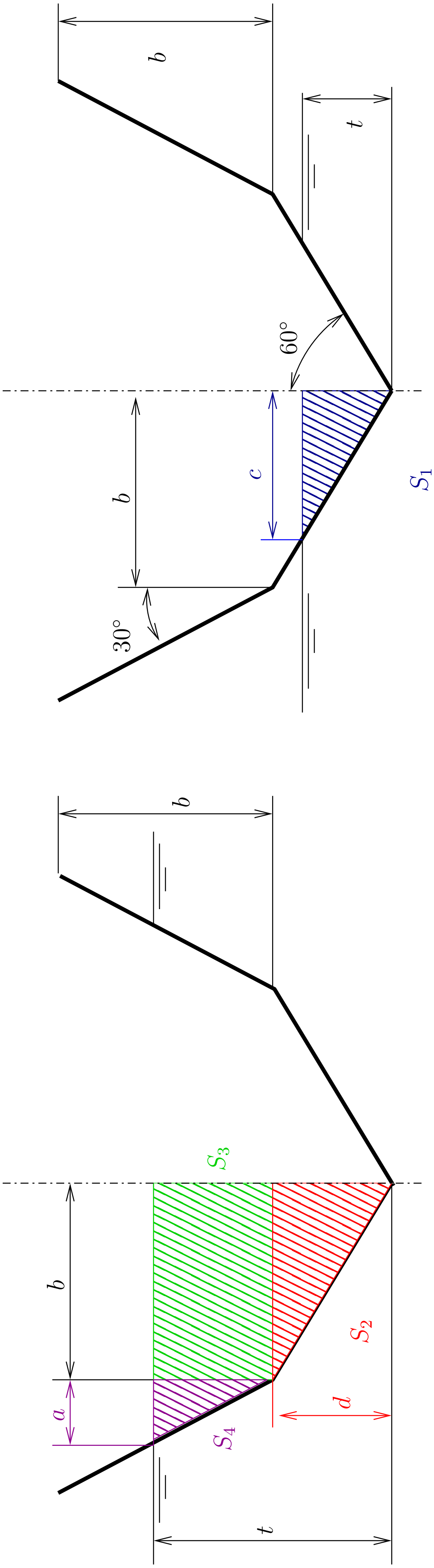

FIG. 1 – Section de l'embarcation flottante dans 2 cas de figure (tournez la feuille - svp).

et l'on écrit :

$$(M+m) = \rho L\left[(k^3b^2 - kb^2) + 2b(1-k^2)t + kt^2\right] \qquad \text{si } t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}b; b + \frac{\sqrt{3}}{3}b\right]$$

.... **[1]**

Le tirant t n'excède pas $d + b = b(1+k)$.

On peut alors tracer ces 2 courbes en remarquant qu'elles sont continues en $t = d$; Lorsque $c = t\sqrt{3} = b$ donc lorsque $t = b\frac{\sqrt{3}}{3} = kb = d$, on a dans un cas :

$$(M+m) = \rho k^2 b^2 \sqrt{3} L = \rho k \frac{\sqrt{3}}{3} b^2 \sqrt{3} L = \rho k b^2 L$$

et dans l'autre :

$$(M+m) = \rho L\left[(k^3b^2 - kb^2) + 2b(1-k^2)kb + k^3b^2\right] = \rho L\left[2k^3b^2 - kb^2 + 2kb^2 - 2k^3b^2\right] = \rho L k b^2$$

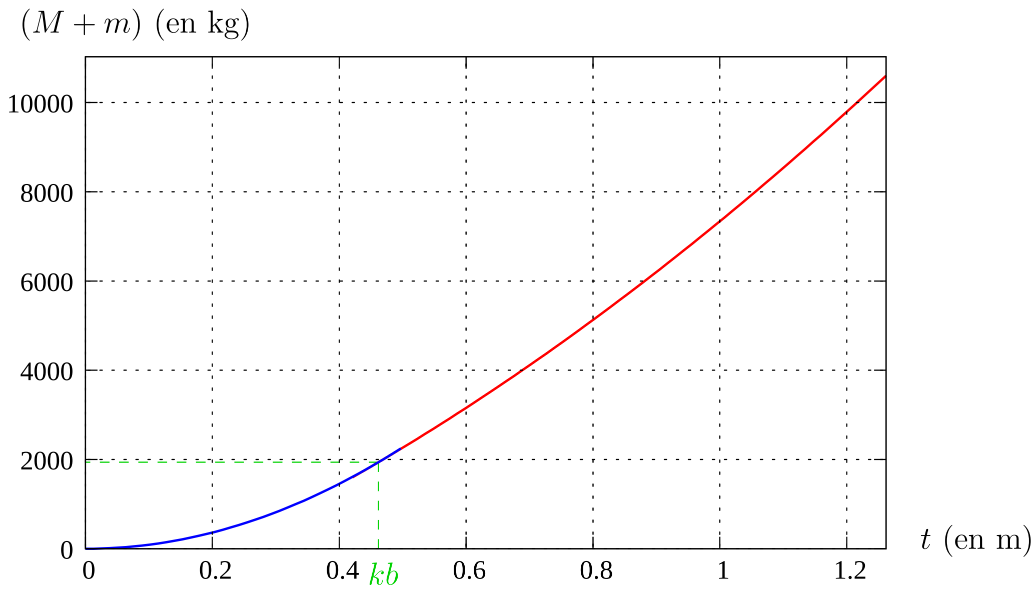

FIG. 2 – Evolution du rapport $(M+m)$ en fonction du tirant t.

.... **[4.5]**

- Lorsque l'embarcation est vide $M = 0$, on a $t = 0.35$ m et le graphe nous donne $(M+m) \approx 1114$ kg donc la masse à vide de l'embarcation est $m = 1114$ kg.
- Pour un tirant $t = 40$ cm, le graphe nous donne $(M+m) \approx 1455$ kg soit $M \approx 341$ kg de chargement.
- Pour un tirant $t = 80$ cm, le graphe nous donne $(M+m) \approx 5127$ kg soit $M \approx 4013$ kg de chargement.
- Pour le tirant maximum $d + b = b(1+k) \approx 1.26$ m, le graphe nous donne $(M+m) \approx 10600$ kg soit $M = 9486$ kg.

.... **[4*3]**

On pouvait éventuellement adimensionner ces courbes en posant les variables sans unités :

$$X = \frac{t}{b} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{(M+m)}{\rho L b^2}$$

et l'on a l'équation de 2 paraboles :

$$X \in [0; k = \frac{\sqrt{3}}{3}] \quad : \quad Y = \sqrt{3} X^2$$
$$X \in [k = \frac{\sqrt{3}}{3}; 1+k = 1+\frac{\sqrt{3}}{3}] \quad : \quad Y = \left[(k^3 - k) + 2(1-k^2)X + kX^2\right]$$

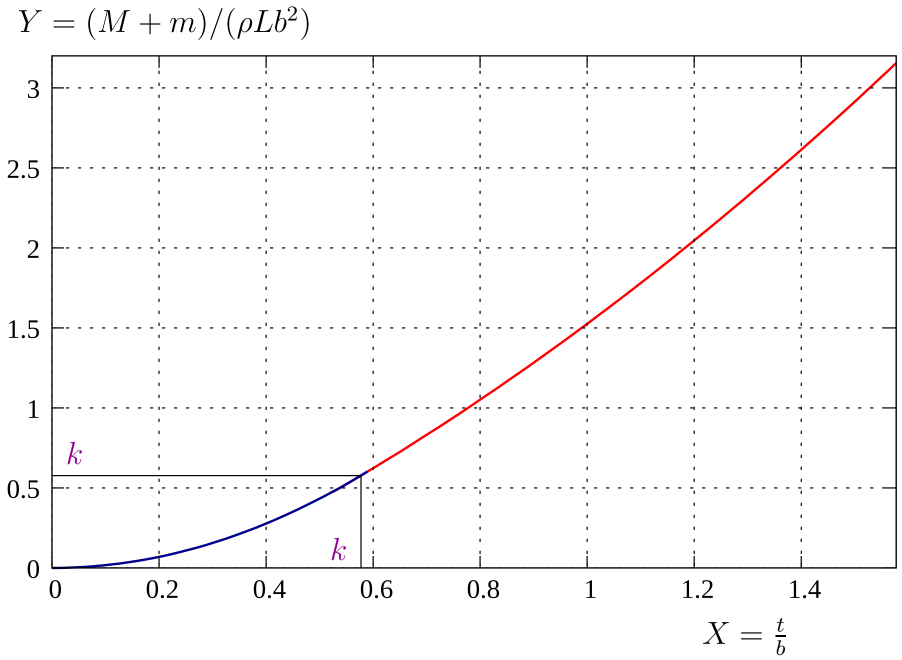

FIG. 3 – Evolution du rapport $Y = (M+m)/(\rho L b^2)$ en fonction du tirant adimensionné $X = \frac{t}{b}$.