Exercice n°1 – Abri-Bus - 9 pts

1) Le volume d'eau récupéré est $V = Llh = 0.135$ m^3 durant $T = 1$ h $= 3600$ s soit un débit volumique $q_v = \frac{V}{t} = 0.135$ m^3.h^{-1} $= 37.5\,10^{-6}$ m^3.s^{-1} $= 0.0375$ l.s^{-1} $= 2.25$ l.mn^{-1}. [**0.75**]

2) L'eau ne stagne pas sur le toit : il n'y a pas de hauteur d'eau sur le toit. Certains ont pensé que la hauteur $h = 2.5$ était au dessus du toit. Pour cela, il aurait fallu que la gouttière soit bouchée durant toute la pluie.

Une fois sur le toit de l'abri-bus, l'eau est quasi immobile et ne possède pas d'énergie cinétique volumique.
L'eau est à la pression atmosphérique donc elle ne possède pas d'énergie de pression effective.
Toute son énergie volumique réside dans son énergie potentielle par rapport au sol où va être disposée la turbine. Cette énergie potentielle volumique vaut $\rho g H = 21582$ J.m^{-3}. ....[**1.5**]

3) En écrivant Bernoulli (sans perte - cf FIG. 1) sur le tube de courant vertical :

$$p_0 + \rho g H + \frac{1}{2}\rho {v_0}^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 = \rho g H - (p_2 - p_0) = \rho g H - p_{e2}$$

Une pression effective positive en 2 diminuera la vitesse en 2. La vitesse maximum peut être évaluée par :

$$\frac{1}{2}\rho {v_2}^2 = \rho g H \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gH} = 6.57 \text{ m/s} \quad (\text{notée } v)$$

On pourrait éventuellement avoir une vitesse plus élevée si $p_{e2} < 0$ donc si $p_2 < p_0$ ce qui parait peu raisonnable.
Les pertes de charge non considérée vont diminuer cette vitesse mais cela n'est pas demandé ici. .[**1.5**]

4) Le débit volumique

$$q_v = \frac{\pi}{4} D^2 v \quad \Longrightarrow \quad D = \sqrt{\frac{4 q_v}{\pi v}} = 2.70 \text{ mm}$$

Si le diamètre est supérieur à 2.70 mm toute l'eau ne remplit pas l'aire de la section droite.
Si le diamètre est inférieur à 2.70 mm de l'eau stagnera sur le toit de l'abri qui devra être muni de rebords suffisament hauts et le débit sera inférieur. .... [**1.25**]

5) La puissance maximum de l'eau à l'entrée de la turbine est :

$$\mathcal{P} = q_v \frac{1}{2}\rho v^2 = q_v \rho g H = 809 \text{ mW}$$

L'énergie fournie par le fluide à la turbine est :

$$E = \mathcal{P} T = 2913 \text{ J } = 809 \text{ mW.h}$$

L'énergie récupérée sur l'arbre de la turbine est :

$$0.6E = 1748 \text{ J } = 486 \text{ mW.h}$$

.... [**1.5**]

6) La puissance consommée à chaque instant $\mathcal{P}_c = 430$ mW durant $\Delta T = 9$ mn engendre une consommation d'énergie :

$$\mathcal{P}_c \Delta T = 232 \text{ J } = 64.5 \text{ mW.h}$$

Un tel système doit posséder des batteries permettant d'emmagasiner l'énergie récupérée 1748 J=7.53*232 J pour qu'elle puisse être utiliser à n'importe quel instant par les 7 utilisateurs (7.53 plus exactement). .... **[1.5]**

7) La perte de charge régulière

$$\Delta X_r = \lambda \frac{H}{D} \rho \frac{v^2}{2} = 176 \text{ kPa}$$

et la perte de puissance

$$q_v \Delta X_r = 6.6 \text{ W}$$

qui est supérieure à la puissance récupérée sur la turbine sans considérer de perte.
Cette perte entraine une diminution du débit et donc de la vitesse ce qui diminuera la perte de puissance mais également la puissance récupérée par la turbine. Ce système semble peut viable. .... **[1]**

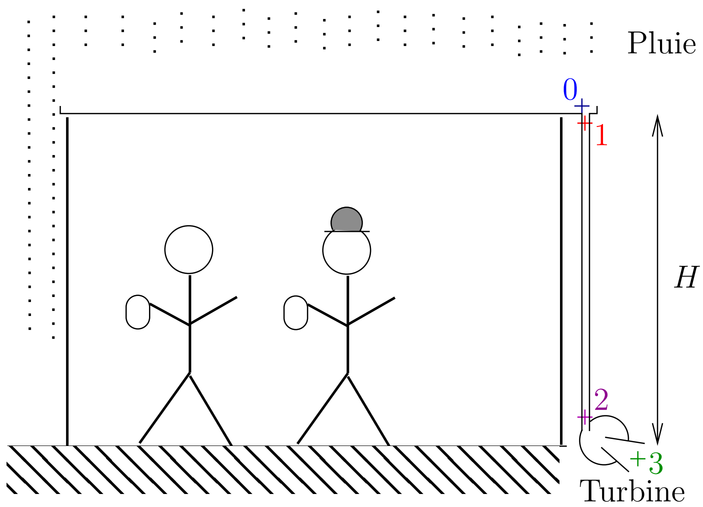

Fig. 1 – Points du tube de courant.

N.B. On pouvait présenter d'une autre manière et en écrivant Bernoulli sur le tube de courant :

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 - \Delta X_s \\ X_2 &= X_1 - \Delta X_r \\ X_3 &= X_2 - \Delta X_i \\ \Longrightarrow \quad X_3 &= X_0 - (\Delta X_s + \Delta X_r + \Delta X_i) \end{aligned}$$

où ΔX_s et ΔX_r sont les pertes de charge singulière à l'entrée de la tuyauterie et régulière dans la tuyauterie que l'on ne considère pas et ΔX_i l'énergie volumique fournie à la turbine.

$$\begin{aligned} X_3 &= X_0 - \Delta X_i \\ p_3 + \rho g z_3 + \frac{1}{2}\rho {v_3}^2 &= p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho {v_0}^2 - \Delta X_i \end{aligned}$$

où $p_0 = p_3 = p_{atm}$, $z_0 - z_3 = H$, $v_0 = 0$ donc :

$$\Delta X_i = \rho g H - \frac{1}{2}\rho {v_3}^2$$

L'énergie volumique ΔX_i fournie à la turbine est maximum dans le cas où $v_3 = 0$ donc :

$$\Delta X_i = \rho g H \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P} = q_v \Delta X_i = q_v \rho g H$$

Exercice n°2 _ Profil d'hélice d'avion - 11 pts

1) Bernoulli sur ligne de courant (cf Cours-TD) donne la pression effective $p_{e\,AR}$ au point d'arrêt :

$$\begin{aligned}
p_{AR} + \rho g z_{AR} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho {V_{AR}}^2}_{=0} &= p_{atm} + \rho g z_\infty + \frac{1}{2}\rho {V_\infty}^2 \\
\Longrightarrow \quad p_{AR} - p_{atm} &= \frac{1}{2}\rho {V_\infty}^2 + \underbrace{\rho g \left(z_\infty - z_{AR}\right)}_{\approx 0} \\
\Longrightarrow \quad p_{e\,AR} &= \frac{1}{2}\rho {V_\infty}^2 = 47824 \text{ Pa}
\end{aligned}$$

.... **[1]**

2)

$$\mathcal{R} = \frac{V_\infty c}{\nu} = 7\;10^6 \quad \text{et} \quad \alpha = +5° \quad \Longrightarrow \quad C_D = C_x = 0.00541 \quad \text{et} \quad C_L = C_z = 1.0164$$

Les graphes ne permettaient pas de déterminer avec précision ces valeurs. Des valeurs voisines sont tout à fait acceptables. .... **[1]**

3)

$$\text{La composante de trainée par unité d'envergure :} \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}R} = \frac{1}{2}\rho c C_x {V_\infty}^2 = 97 \text{ N.m}^{-1}$$

$$\text{La composante de portance par unité d'envergure :} \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{1}{2}\rho c C_z {V_\infty}^2 = 18228 \text{ N.m}^{-1}$$

$$\text{La finesse :} \quad \frac{P}{T} = \frac{C_z}{C_x} = 187.9$$

.... **[1.5+1.5 (dessin)]**

4)

$$\text{La composante tangentielle par unité d'envergure représentée par 66 mm soit :} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}R} = 6600 \text{ N.m}^{-1}$$

$$\text{La composante axiale par unité d'envergure représentée par 170 mm soit :} \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}R} = 17000 \text{ N.m}^{-1}$$

.... **[0.75+0.75 (dessin)]**

5) Ce travail étant réalisé pour différents profils d'une pale de l'hélice, on peut intégrer entre les rayons mini R_{mini} (proche de l'axe de rotation) et maxi R_{Maxi} (extrémité de la pale d'hélice).
La force axiale globale qui est l'effet utile car elle fait avancer l'avion est :

$$2\int_{R_{mini}}^{R_{Maxi}} \mathrm{d}A = 2\int_{R_{mini}}^{R_{Maxi}} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R$$

La couple axiale globale qui est l'effet néfaste car il demande au moteur à fournir ce couple est :

$$2\int_{R_{mini}}^{R_{Maxi}} R\mathrm{d}Q = 2\int_{R_{mini}}^{R_{Maxi}} R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R$$

.... **[1]**

6) La décomposition du mouvement de l'air par rapport au profil permet de faire intervenir :

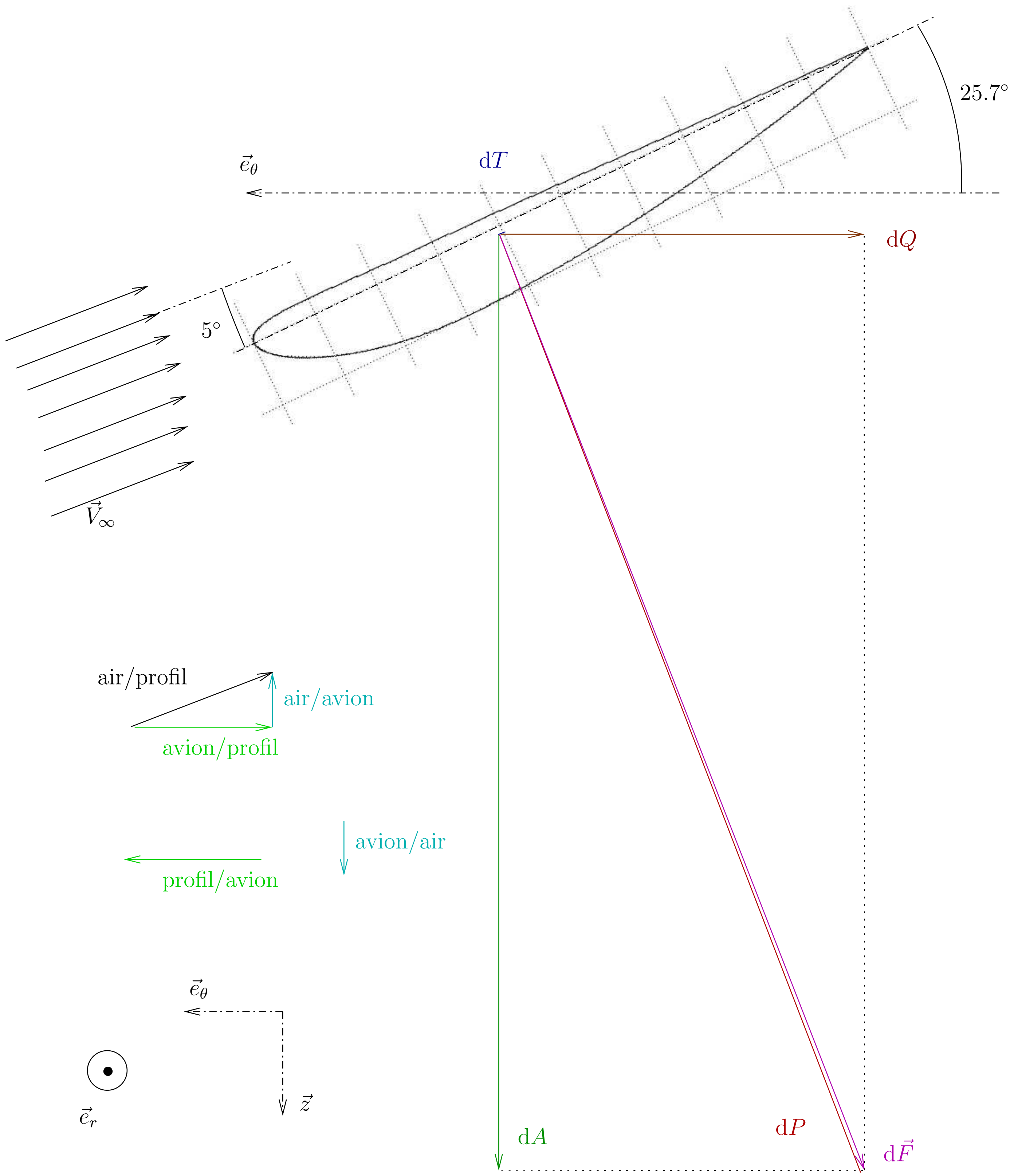

FIG. 2 – Profil de pale d'hélice.

– la vitesse de l'avion par rapport au profil ;
– la vitesse de l'air par rapport à l'avion.

Il y a 2 manières de calculer ces intensités de vitesses :

– L'intensité de la vitesse du profil par rapport à l'avion est $\Omega R = 261.8$ m/s ; L'intensité de la vitesse de l'avion par rapport à l'air est $v = \sqrt{V_\infty{}^2 - (\Omega R)^2} = 99.3$ m/s soit 357.5 km/h
– L'angle entre $\vec{V}_\infty$ et la corde du profil est 5°, celui entre la corde et $\vec{e}_\theta$ est 25.7° donc l'angle entre $\vec{V}_\infty$ et $\vec{e}_\theta$ (et la vitesse de l'avion par rapport au profil) est $\beta = 20.7°$. On a alors :
  – vitesse de l'avion par rapport au profil : $V_\infty \cos(\beta) = 261.9$ m/s
  – vitesse de l'air par rapport à l'avion : $V_\infty \sin(\beta) = 98.9$ m/s

La différence vient du fait que la valeur fournie de la vitesse de rotation est approximative. .... **[1.25]**

7) L'angle β précédent est tel que $\tan\beta = \frac{v}{\Omega R}$. Cet angle change de valeur et devient β' tel que $\tan\beta' = \frac{v}{\frac{2}{3}\Omega R} = \frac{3v}{2\Omega R} = \frac{3}{2}\tan\beta$ soit $\beta' = 0.52$ rd $= 29.5°$.

L'angle d'incidence est alors l'angle de calage moins cet angle β' soit $\alpha' = 25.7° - 29.5° = -3.84°$. Le profil n'est plus en incidence de $+5°$ mais de $-3.84°$: ses caractéristes aérodynamiques vont donc changer.

La nouvelle vitesse de l'air par rapport au profil est

$$V'_\infty = \sqrt{v^2 + \left(\frac{2}{3}\Omega R\right)^2} = 200.7 \text{ m.s}^{-1}$$

Le nouveau nombre de Reynolds et les coefficients aérodynamiques :

$$\mathcal{R}' = \frac{V'_\infty c}{\nu} = 5.02\ 10^6 \quad \text{et} \quad \alpha' = -3.84° \quad \Longrightarrow \quad C_D = C_x = 0.0065 \quad \text{et} \quad C_L = C_z \approx 0.02$$

La pression effective au point d'arrêt :

$$\frac{1}{2}\rho V'_\infty{}^2 = 24575 \text{ Pa}$$

et les composantes d'effort

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}R} = 60 \text{ N.m}^{-1} \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} \approx 1840 \text{ N.m}^{-1} \quad ; \quad \text{finesse} \approx 3$$

Vue l'évaluation de C_z, ce profil a fait chuter sa portance (90 fois plus faible) ce qui engendre une énorme baisse de la composante axiale ; l'avion va forcément ralentir. .... **[2.25]**

N.B. : D'autres valeurs pouvaient être trouvées suivant l'évaluation de C_z.