Première manière de paramétrer le problème.

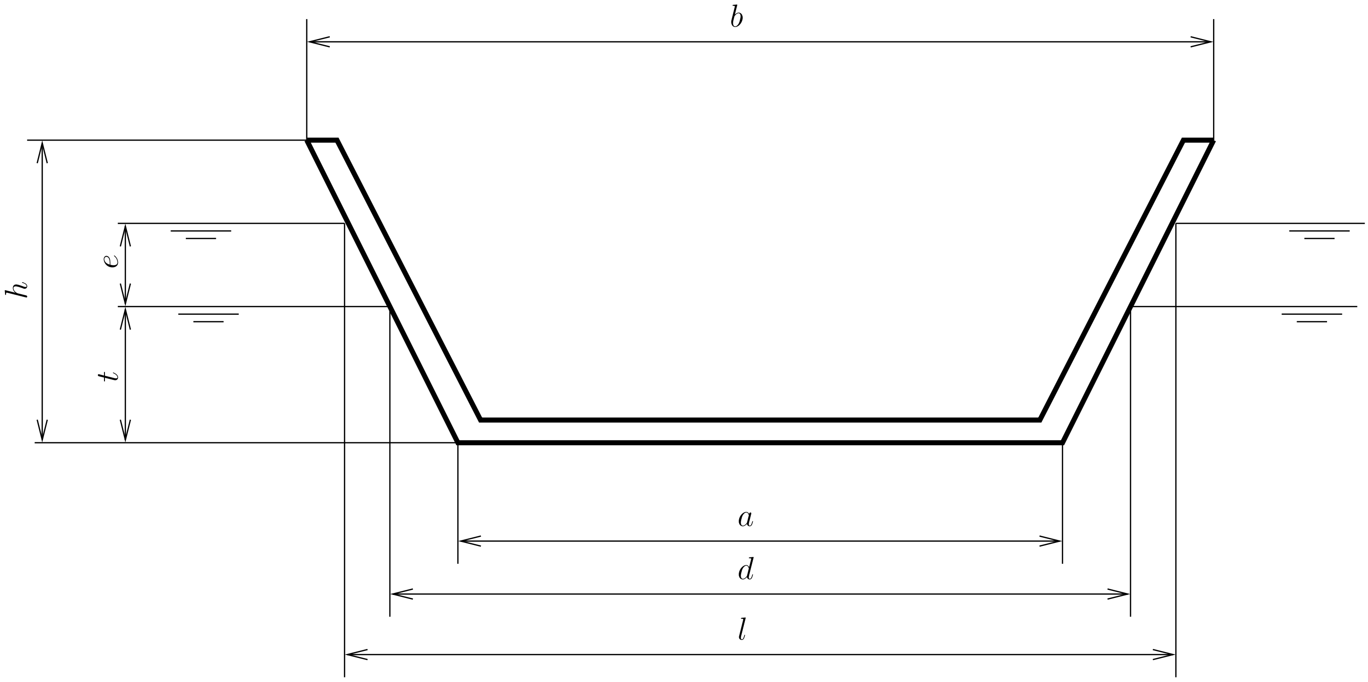

Fig. 1 – Section de l'embarcation flottante.

Le volume d'eau de mer déplacé est $V_1 = S_1 L$: .... **[1]**

$$S_1 = at + \frac{1}{2}(d-a)t = \frac{1}{2}(d-a+2a)t = \frac{1}{2}(a+d)t$$

Le volume d'hydrocarbure déplacé est $V_2 = S_2 L$: .... **[1]**

$$S_2 = \frac{1}{2}(l+d)e$$

Le théorème de Thalès nous permet d'écrire : .... **[1]**

$$\frac{\frac{1}{2}(b-a)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(d-a)}{t} = \frac{\frac{1}{2}(l-d)}{e} = \frac{1}{2}k \qquad \text{où} \qquad k = 1$$
$$\Longrightarrow \quad d = kt + a \qquad \text{et} \qquad l = ke + d = ke + kt + a$$

La poussée d'Archimède (celle dûe à l'air est négligée) est alors : .... **[1]**

$$P_A = \rho V_1 g + \rho' V_2 g$$

Cette poussée compense le poids du bateau chargé (m masse à vide et M masse du chargement).

$$\begin{aligned}
P_A &= (M+m)g \\
\Longrightarrow \quad (\rho V_1 + \rho' V_2) &= (M+m) \\
\Longrightarrow \quad \rho\frac{1}{2}(a+d)tL + \rho'\frac{1}{2}(l+d)eL &= (M+m) \\
\Longrightarrow \quad \rho(a+d)t + \rho'(l+d)e &= \frac{2(M+m)}{L} \\
\Longrightarrow \quad \rho(a+kt+a)t + \rho'(ke+kt+a+kt+a)e &= \frac{2(M+m)}{L} \\
\Longrightarrow \quad \rho(2a+kt)t + \rho'(ke+2kt+2a)e &= \frac{2(M+m)}{L} \\
\Longrightarrow \quad \rho kt^2 + (2\rho a + 2\rho' ke)t + \rho'(ke^2+2ae) - \frac{2(M+m)}{L} = 0 & \\
\Longrightarrow \quad \rho t^2 + (2\rho a + 2\rho' e)t + \rho'(e^2+2ae) - \frac{2(M+m)}{L} = 0 &
\end{aligned}$$

. . . . **[2]**

1) Pour $t = 5$ cm, on a :

$$M = \frac{L}{2}\left(\rho(2a+kt)t + \rho'(ke+2kt+2a)e\right) - m = 107.4 \text{ kg}$$

rem : $d = 1.1$ m et $l = 1.2$ m. . . . . **[2]**

2) Pour $t = 5$ cm on a : $p_e = \rho' ge + \rho gt = 1366$ Pa et $p = p_0 + p_e = 102.666$ kPa . . . . **[2]**

3) Pour $t = h - e = 30$ cm, on a :

$$M = \frac{L}{2}\left(\rho(2a+kt)t + \rho'(ke+2kt+2a)e\right) - m = 1466 \text{ kg}$$

. . . . **[2]**

4) Numériquement pour $M = 997$ kg, on a :

$$(1) \quad \Longrightarrow \quad 1025t^2 + 1816t - 610.4 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta \approx 2408^2$ et la seule racine positive physiquement logique est $t = 0.22$ m . . . . **[6]**

5) Pour $t = 0$ on a :

$$(M+m) = \frac{1}{2}\rho' L(ke^2 + 2ae) = 374 \text{ kg}$$

qui représente la masse minimum que doit avoir la barge pour que l'on soit sure qu'elle déplace de l'eau. Si la barge possède une masse plus faible, elle ne déplacera que de l'hydrocarbure. . . . . **[2]**

Pour ceux qui trouve cette correction trop chargée en notations pour répondre à la première question, les relations de Thalès vous ont donnés :

$$d = a + t \qquad \text{et} \qquad l = e + d = e + t + a$$

Les volumes déplacés sont alors et valent (pour $t = 5$ cm et $t = 30$ cm) :

$$V_1 = \frac{1}{2}(2a+t)tL \approx 0.2063 \text{ m}^3 \quad \text{et} \quad 1.4250 \text{ m}^3 \qquad \text{et} \qquad V_2 = \frac{1}{2}(e+2t+2a)eL \approx 0.45 \text{ m}^3 \quad \text{et} \quad 0.5750 \text{ m}^3$$

et la poussée d'Archimède :

$$P_A = (M+m)g = 5959 \text{ N} \qquad \text{et} \qquad 19293 \text{ N} \quad \Longrightarrow \quad M = 107.4 \text{ kg} \qquad \text{et} \qquad 1966.6 \text{ kg}$$

Deuxième manière de paramétrer le problème.

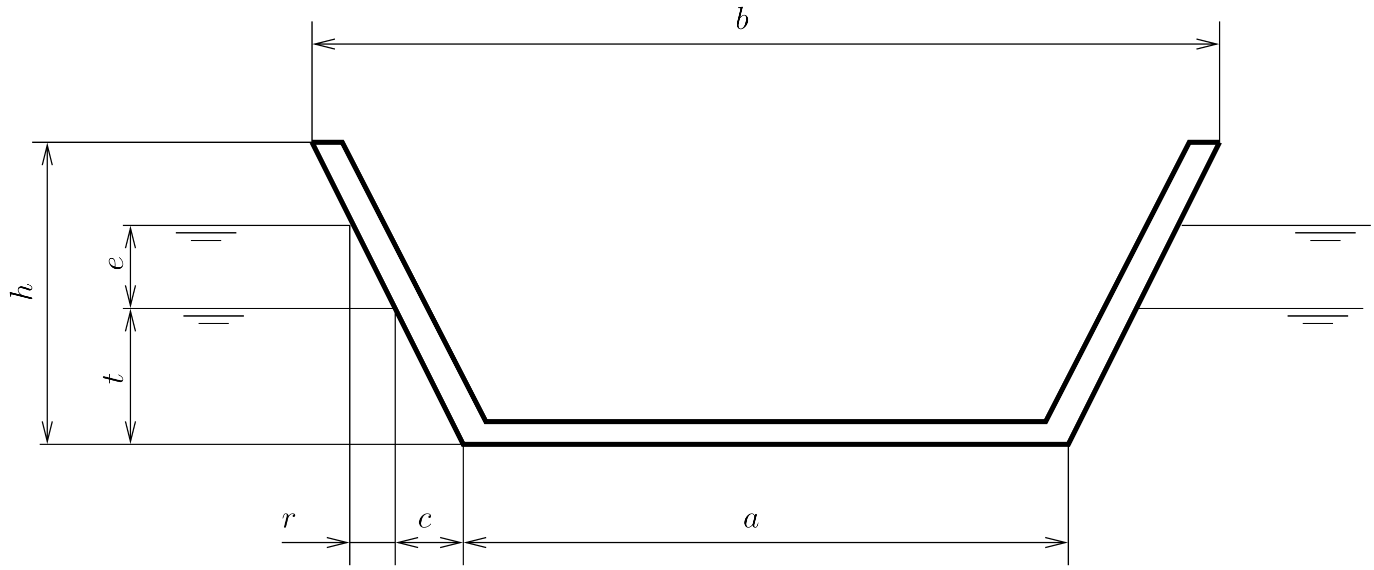

Fig. 2 – Section de l'embarcation flottante.

Le volume d'eau de mer déplacé est $V_1 = S_1 L$:

$$S_1 = at + ct = (a+c)t$$

Le volume d'hydrocarbure déplacé est $V_2 = S_2 L$:

$$S_2 = (a+2c)e + re = (a+2c+r)e$$

Le théorème de Thalès nous permet d'écrire :

$$\frac{\frac{1}{2}(b-a)}{h} = \frac{c}{t} = \frac{c+r}{t+e} = \frac{r}{e} = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad c = \frac{t}{2} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{e}{2}$$

La poussée d'Archimède (celle dûe à l'air est négligée) est alors :

$$P_A = \rho V_1 g + \rho' V_2 g$$

Cette poussée compense le poids du bateau chargé (m masse à vide et M masse du chargement).

$$P_A \quad = \quad (M+m)g$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad (\rho V_1 + \rho' V_2) &= (M+m) \\
\Longrightarrow \quad \rho(a+c)tL + \rho'(a+2c+r)eL &= (M+m) \\
\Longrightarrow \quad \rho(a+\frac{t}{2})t + \rho'(a+t+\frac{e}{2})e &= \frac{(M+m)}{L} \\
\Longrightarrow \quad \rho\frac{t^2}{2} + \rho at + \rho' ae + \rho' et + \rho'\frac{e^2}{2} &= \frac{(M+m)}{L} \\
\Longrightarrow \quad \rho t^2 + (2\rho a + 2\rho' e)t + \rho'(2ae + e^2) &= \frac{2(M+m)}{L}
\end{aligned}
$$

et l'on retrouve la même expression que pour le précédent paramétrage.