Licence L2 - PCSTM - C.C. Mécanique des Fluides
2014-2015 _ Durée : 0h30
Responsable : L. Blanchard
Eléments de correction

1) Le volume extérieur est $\mathcal{V}_1 = bhL = 480$ m^3.
Le volume intérieur est $\mathcal{V}_2 = (b-2e)(h-e)(L-2e) = 396.5$ m^3.
Le volume de béton est $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = 83.5$ m^3.
La masse de la coque de béton est $m = \rho'\mathcal{V} = 150314$ kg.
. . . . **[1.5]**

Le centre de gravité G_1 du volume extérieur est positionné par $\vec{OG_1} = -\frac{h}{2}\vec{z}$
Le centre de gravité G_2 du volume intérieur est positionné par $\vec{OG_2} = -\frac{(h-e)}{2}\vec{z}$
Le centre de gravité G de la coque est positionné par

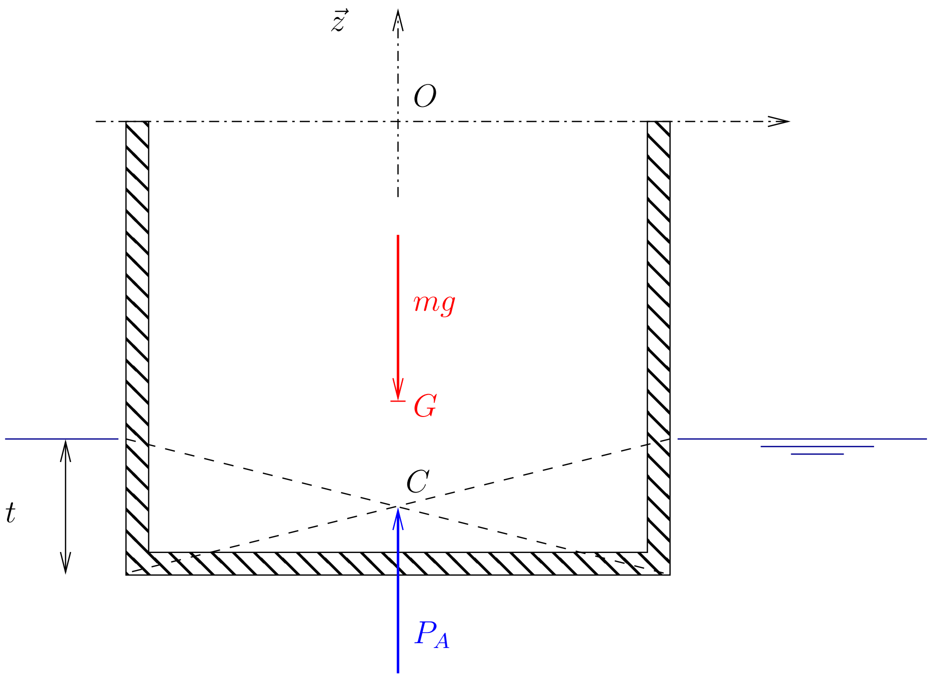
$$\mathcal{V}\vec{OG} = \mathcal{V}_1\vec{OG_1} - \mathcal{V}_2\vec{OG_2} \quad \Longrightarrow \quad \vec{OG}\cdot\vec{z} = -3.71 \text{ m}$$

. . . . **[1.5]**

2) Son poids mg compense la poussée d'Archimède P_A soit :

$$mg = \rho bLtg \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{m}{\rho bL} = 1.83 \text{ m}$$

. . . . **[2]**



La poussée d'Archimède est appliquée au centre de poussée C :

$$\vec{OC} = \left(-h + \frac{t}{2}\right)\vec{z} \quad \Longrightarrow \quad \vec{OC}\cdot\vec{z} = -5.08 \text{ m}$$

Ce centre de poussée C est positionné sous le centre d'inertie G : l'équilibre est donc instable. . . . . . **[2]**

3) Le nouveau poids compense la nouvelle poussée d'Archimède soit :

$$(m+m_0)g = \rho b L t_0 g \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \frac{m+m_0}{\rho b L}$$

.... **[0.5]**

Il faut que

$$\begin{aligned}
(m+m_0)\vec{OC} &= \left(m\vec{OG} + m_0\vec{OB}\right)\\
(m+m_0)(-h+\frac{t_0}{2}) &= m\vec{OG}\cdot\vec{z} - m_0(h-e)\\
-(m+m_0)h + (m+m_0)\frac{m+m_0}{2\rho b L} &= m\vec{OG}\cdot\vec{z} - m_0(h-e)\\
-2\rho b L\left[(m+m_0)h - m_0(h-e)\right] + (m+m_0)(m+m_0) &= 2\rho b L m\vec{OG}\cdot\vec{z}\\
m^2 + 2mm_0 + {m_0}^2 - 2\rho b L(mh + m_0 e) - 2\rho b L m\vec{OG}\cdot\vec{z} &= 0\\
{m_0}^2 + (2m - 2\rho b L e)m_0 + m^2 - 2\rho b L m(h + \vec{OG}\cdot\vec{z}) &= 0\\
{m_0}^2 + Bm_0 + C = 0 \quad \text{avec} \quad B = 251429 \text{ kg} \,; C &= -3.38\,10^{10} \text{ kg}^2\\
m_0 &= 97013 \text{ kg}
\end{aligned}$$

m_0 représente plus de 64 % de la masse de la coque, ce qui est trop énorme pour le considérer comme ponctuel. Si cette masse est faite de béton, il faudrait un volume de $\frac{m_0}{\rho'} = 53.9$ m^3 soit une épaisseur de béton au fond et à l'intérieur de cette coque de 77 cm. .... **[5.5]**

4) Le nouveau poids compense la nouvelle poussée d'Archimède soit :

$$(m+m_0)g = \rho b L t_0 g \quad \Longrightarrow \quad t_0 = \frac{m+m_0}{\rho b L} = 3.78 \text{ m}$$

.... **[1.5]**

5) Les poids de la coque lestée et de la maison M compensent alors la poussée d'Archimède soit :

$$(m+m_0+M)g = \rho b L\frac{8}{10}hg \quad \Longrightarrow \quad M = \rho b L \frac{8}{10}h - (m+m_0) = 83286 \text{ kg}$$

.... **[1.5]**

6)

Le centre de gravité de la coque lestée et de la maison G_0 doit être situé au dessous du centre de poussée C or :

$$\vec{OC}\cdot\vec{z} = -h + \frac{t}{2} = -h + \frac{8}{20}h = -\frac{12}{20}h = -\frac{3}{5}h = -3.60 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
(m+m_0+M)\vec{OG_0}\cdot\vec{z} &= m\vec{OG}\cdot\vec{z} + m_0\vec{OB}\cdot\vec{z} + M\vec{OG'}\cdot\vec{z}\\
\Longrightarrow \quad \vec{OG_0}\cdot\vec{z} = \frac{m}{(m+m_0+M)}\vec{OG}\cdot\vec{z} &+ \frac{m_0}{(m+m_0+M)}\vec{OB}\cdot\vec{z} + \frac{M}{(m+m_0+M)}\vec{OG'}\cdot\vec{z}\\
\Longrightarrow \quad \vec{OG_0}\cdot\vec{z} &= 38.2\%\,\vec{OG}\cdot\vec{z} + 30.5\%\,\vec{OB}\cdot\vec{z} + 31.3\%\,\vec{OG'}\cdot\vec{z}
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
\vec{OG_0}\cdot\vec{z} < \vec{OC}\cdot\vec{z} \quad &\Longrightarrow \quad 38.2\%\,\vec{OG}\cdot\vec{z} + 30.5\%\,\vec{OB}\cdot\vec{z} + 31.3\%\,\vec{OG'}\cdot\vec{z} < \vec{OC}\cdot\vec{z}\\
&\Longrightarrow \quad 31.3\%\,\vec{OG'}\cdot\vec{z} < \vec{OC}\cdot\vec{z} - 38.2\%\,\vec{OG}\cdot\vec{z} - 30.5\%\,\vec{OB}\cdot\vec{z}\\
&\Longrightarrow \quad \vec{OG'}\cdot\vec{z} < 0.64 \text{ m}
\end{aligned}$$

.... **[4]**