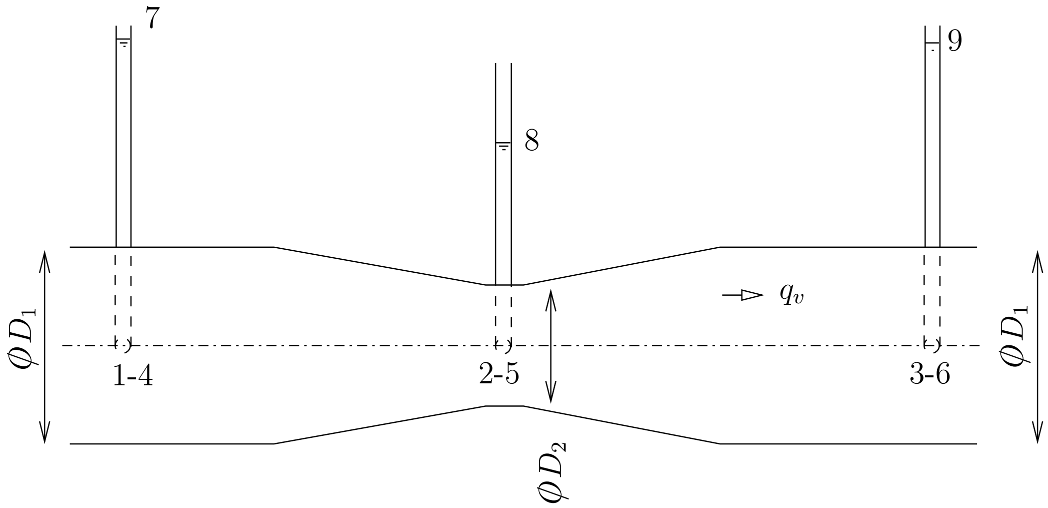
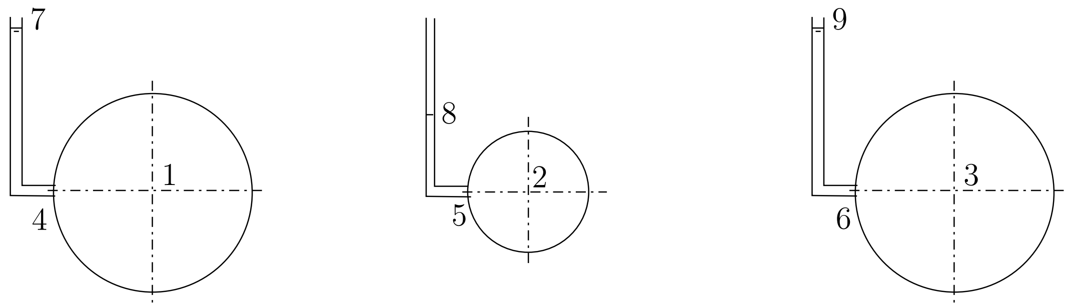
Exercice n°1 _ 8 pts



Sections du venturi



1) Bernoulli sur le tube de courant 1-2 donne :

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{{v_1}^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{{v_2}^2}{2} \quad \text{avec} \quad z_1 = z_2$$

L'équation de la statique des fluides donne :

$$p_4 + \rho g z_4 = p_7 + \rho g z_7 \quad \text{et} \quad p_5 + \rho g z_5 = p_8 + \rho g z_8 \quad \text{avec} \quad p_7 = p_8 = p_{atm}$$

Et la pression varie peu dans chaque section :

$$p_1 \approx p_4 \quad \text{et} \quad p_2 \approx p_5$$

La conservation du débit volumique donne :

$$q_v = S_1 v_1 = \frac{\pi}{4} {D_1}^2 v_1 = S_2 v_2 = \frac{\pi}{4} {D_2}^2 v_2 \quad \Longrightarrow \quad v_i = \frac{4 q_v}{\pi {D_i}^2}$$

En exploitant toutes ces équations, il vient :

$$
\begin{aligned}
p_4 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 &= p_5 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \\
p_7 + \rho g z_7 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 &= p_8 + \rho g z_8 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \\
\rho g (z_7 - z_8) &= \frac{1}{2}\rho ({v_2}^2 - {v_1}^2) \\
g (z_7 - z_8) &= \frac{1}{2}\frac{16{q_v}^2}{\pi^2}(\frac{1}{{D_2}^4} - \frac{1}{{D_1}^4}) \\
g (z_7 - z_8) &= \frac{8{q_v}^2}{\pi^2}\frac{{D_1}^4 - {D_2}^4}{{D_1}^4{D_2}^4} \\
\frac{\pi^2 g (z_7 - z_8){D_1}^4{D_2}^4}{8({D_1}^4 - {D_2}^4)} &= {q_v}^2 \\
\Longrightarrow \quad q_v &= \pi {D_1}^2{D_2}^2\sqrt{\frac{g(z_7 - z_8)}{8({D_1}^4 - {D_2}^4)}}
\end{aligned}
$$

.... **[5]**

2) $q_v \approx 0.41$ l.s^{-1} , $v_1 = 0.907$ m.s^{-1} , $v_2 = 2.665$ m.s^{-1}

$$\mathcal{R}_1 = \frac{v_1 D_1}{\nu} = 21762 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{v_2 D_2}{\nu} = 37306$$

$\mathcal{R} > 2000$: l'écoulement est turbulent. .... **[1.5]**

3) La conservation du débit volumique impose la même vitesse moyenne dans les sections 1 et 3 du fait du diamètre identique :

$$q_v = \frac{\pi}{4}D_1^2 v_1$$

Bernoulli sur le tube de courant horizontal 1-3 avec une perte de charge singulière s'écrit :

$$p_1 + \rho\frac{{v_1}^2}{2} = p_3 + \rho\frac{{v_1}^2}{2} + \Delta X_s$$

L'équation de la statique des fluides donne :

$$p_4 + \rho g z_4 = p_7 + \rho g z_7 \quad \text{et} \quad p_6 + \rho g z_6 = p_9 + \rho g z_9 \quad \text{avec} \quad p_7 = p_9 = p_{atm}$$

Et la pression varie peu dans chaque section :

$$p_1 \approx p_4 \quad \text{et} \quad p_3 \approx p_6$$

Il vient :

$$\Delta X_s = p_1 - p_3 = p_4 - p_6 = \rho g (z_7 - z_9) = 176.6 \text{ Pa} = \xi\rho\frac{{v_1}^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \xi = 0.429$$

La perte de puissance est :

$$\mathcal{P} = q_v \Delta X_s = 72.4 \text{ mW}$$

.... **[2.5]**

Exercice n°2 _ Voile - 9 pts

$$q_v = S_a v_1 = S_a v_2 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v_2$$
$$\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_1 = v_1 \left[\cos(\alpha - \varphi)\vec{x} + \sin(\alpha - \varphi)\vec{y}\right]$$
$$\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_2 = v_1 \left[\cos(\alpha + \varphi)\vec{x} + \sin(\alpha + \varphi)\vec{y}\right]$$

$$S_v = HL \quad ; \quad S_a = Hl \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{l}{L} = \frac{S_a}{S_v} \quad \Longrightarrow \quad S_a = S_v \sin\varphi$$

En appliquant le théorème d'Euler au tube de courant $\mathcal{D}$ qui possède comme contour :
- sa section d'entrée S_{a1} où l'air est à p_a car l'écoulement est unidirectionel ;
- sa section de sortie S_{a2} où l'air est à p_a car l'écoulement est unidirectionel ;
- la surface de voile S_v où l'air est à une pression $p(M) = p_a + p_e(M)$ non constante dépendant du point M de la voile ;
- et le reste de son contour S_{air} qui est en contact avec l'air à p_a.

$$\begin{aligned}
\vec{F}(ext \to \mathcal{D}) &= q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\
&= \rho S_a v_1 \left[v_1 \left(\cos(\alpha+\varphi)\vec{x} + \sin(\alpha+\varphi)\vec{y}\right) - v_1 \left(\cos(\alpha-\varphi)\vec{x} + \sin(\alpha-\varphi)\vec{y}\right)\right] \\
&= \rho S_a {v_1}^2 \left[\left(\cos(\alpha+\varphi) - \cos(\alpha-\varphi)\right)\vec{x} + \left(\sin(\alpha+\varphi) - \sin(\alpha-\varphi)\right)\vec{y}\right] \\
\text{où } \vec{F}(ext \to \mathcal{D}) &= \iint_{(S_{a1}+S_{a2}+S_v+S_{air})} -p_a \vec{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{(S_v)} -p_e(M)\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\vec{F}
\end{aligned}$$

où $-\vec{F}$ étant la force effective exercée par la voile sur le tube et où le poids du tube de courant n'a pas été pris en compte car perpendiculaire au plan. La force effective exercée par le tube de courant sur la voile - donc par l'air sur la voile - est alors :

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\rho S_a {v_1}^2 \left[\left(\cos(\alpha+\varphi) - \cos(\alpha-\varphi)\right)\vec{x} + \left(\sin(\alpha+\varphi) - \sin(\alpha-\varphi)\right)\vec{y}\right] \\
\vec{F}\cdot\vec{x} &= -\rho S_a v_1^2 (\cos(\alpha+\varphi) - \cos(\alpha-\varphi)) \\
&= -\rho S_a v_1^2 \left(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi - \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi\right) \\
&= 2\rho S_a v_1^2 \sin\alpha \sin\varphi \\
&= 2\rho S_v v_1^2 \sin\alpha \sin^2\varphi
\end{aligned}$$

$S_v = 4.6$ m2 ; $\quad \rho = 1.2$ kg.m3 ; $\quad v_1 = 5$ m/s ; $\quad \alpha = \varphi = 45^\circ \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}\cdot\vec{x} = 97.5$ N

Exercice n°3 _ 2 pts

La pression effective à 52 m d'altitude est :

$$p_e = -\rho g \Delta h = -608.22 \text{ Pa} \qquad \text{avec } \Delta h = 50 \text{ m}$$