Exercice n°1 – Jet

1) $q_v = S_0 v_0 = \frac{\pi d^2}{4} v_0 \implies v_0 = 19.10 \text{ m.s}^{-1}$ .... **[1]**
Bernoulli sur le tube de courant :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 = p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho {v_0}^2$$

L'écoulement étant unidirectionel dans les sections 0 et 1, le pression y est la pression atmosphérique p_a, et $(z_1 - z_0) = h$ donc :

$$\frac{1}{2}{v_1}^2 = \frac{1}{2}{v_0}^2 - gh \implies {v_1}^2 = {v_0}^2 - 2gh \implies v_1 = \sqrt{{v_0}^2 - 2gh} = 18.97 \text{ m.s}^{-1}$$

.... **[1.5]**
Bernoulli sur le tube de courant :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$$

L'écoulement étant également unidirectionel dans la section 2, le pression y est la pression atmosphérique p_a, et $z_2 \approx z_1$ donc $v_2 = v_1$. .... **[0.75]**

2) $q_v = S_0 v_0 = S_1 v_1 = S_2 v_2 \implies S_1 = S_2 = 79.07 \text{ mm}^2$ alors que $S_0 = 78.54 \text{ mm}^2$. .... **[0.25]**
La section de l'écoulement augmentant avec l'altitude, le jet va donc changer de diamètre : son diamètre va augmenter. La vitesse ne sera pas exactement verticale mais sera incliné faiblement car $S_1 \approx S_0$ (réponse à la dernière question).

3) Bernoulli sur la ligne de courant 1-3 donne :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 = p_3 + \rho g z_3 + \frac{1}{2}\rho {v_3}^2$$

Les altitudes sont quasi identiques, $v_3 = 0$ donc :

$$p_{e3} = p_3 - p_a = \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 = 179.9 \text{ kPa}$$

.... **[0.75]**

4) Le théorème d'Euler appliqué au domaine $\mathcal{D}$ qui est l'eau situé entre les sections S_1 et S_2 proche du disque s'écrit :

$$\vec{F}_{\bar{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}} = \text{"} q_m(\vec{v}_{sortie} - \vec{v}_{entree}) \text{"}$$

.... **[0.25]**
Cependant ici, les vitesses de sortie sont de révolution autour de l'axe du disque donc l'ensemble des "$q_m \vec{v}_{sortie}$" s'annule. Il reste alors :

$$\vec{F}_{\bar{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}} = -\rho q_v v_1 \vec{z}$$

.... **[0.75]**
Le contour de $\mathcal{D}$ est :
- La section S_1 où l'eau est la pression atmosphérique p_a ;
- La section S_2 où l'eau est la pression atmosphérique p_a ;
- La surface S_a de contact avec l'air où l'air est la pression atmosphérique p_a ;

– La surface S_d de contact avec le disque où la pression absolue $p(M)$ n'est pas constante et peut être exprimée à partir de la pression effective $p_e(M)$: $p(M) = p_e(M) + p_a$.

L'ensemble des forces est alors :

$$\vec{F}_{\bar{\mathcal{D}}\to\mathcal{D}} = \vec{P}oids(\mathcal{D}) + \iint_{S_1} -p_a\vec{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_a} -p_a\vec{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} -p_a\vec{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_d} -(p_a + p_e(M))\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

En négligeant le poids de $\mathcal{D}$ et en remarquant que le contour $S_1 + S_2 + S_a + S_d$ est fermé, l'ensemble des forces se résume à :

$$\vec{F}_{\bar{\mathcal{D}}\to\mathcal{D}} = -\iint_{S_d} p_e(M)\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\iint_{S_d} p_e(M)\vec{z}\,\mathrm{d}S = -F\vec{z}$$

où $-F\vec{z}$ est la force effective exercé la plaque sur l'eau. On a alors :

$$F = \rho q_v v_1 = 28.45 \text{ N}$$

.... **[2.25]**

5) La pression effective moyenne qui règne sur la surface de contact entre l'eau et le disque est :

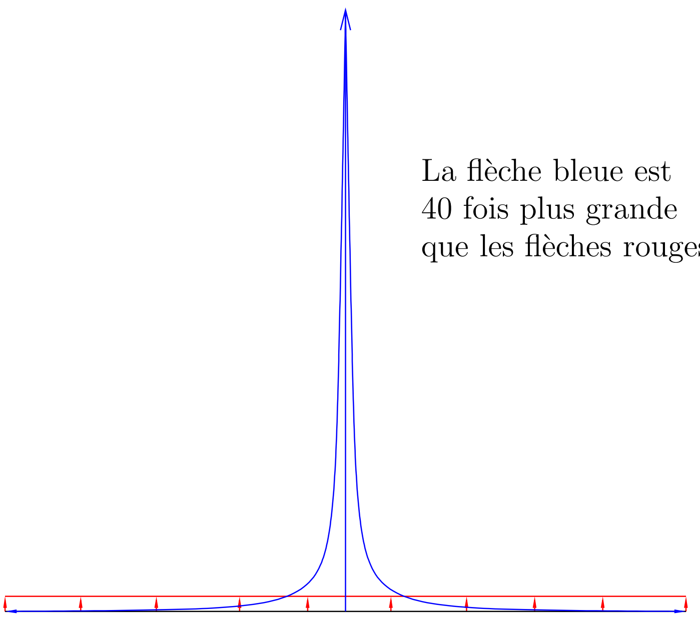
$$p_{e\,moy} = \frac{4F}{\pi D^2} = 4.47 \text{ kPa}$$

On remarque que : $p_{e3} \approx 40 p_{e\,moy}$. .... **[1]**

La répartition de pression $p_e(M)$ dessinée en bleue est telle que :

$$\iint_{S_d} p_e(M)\,\mathrm{d}S = p_{e\,moy} S = F \quad \Longrightarrow \quad p_{e\,moy} = \frac{1}{S}\iint_{S_d} p_e(M)\,\mathrm{d}S$$

.... **[1]**



.... **[1]**

6) La force exercée par l'air sur le disque est :

$$-p_a\frac{\pi D^2}{4}\vec{z} \quad \Longrightarrow \quad p_a\frac{\pi D^2}{4} = 644 \text{ N}$$

.... **[0.25]**

La force effective exercé l'eau sur la plaque est $F\vec{z}$ et est la somme de la force absolue $F_A\vec{z}$ exercé l'eau sur le disque et la force exercée par l'air sur le disque soit :

$$F_A = 644.4 + 28.45 \text{ N} = 672.9 \text{ N}$$

.... **[0.75]**

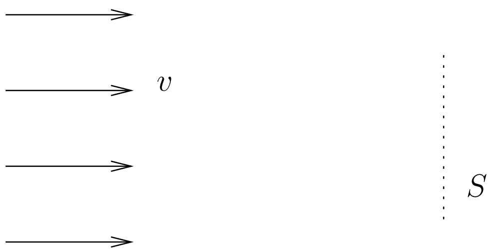
7) Pour que le levier soit en équilibre, il faut que :

$$mga = F(a+b) \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{F(a+b)}{ga} = 14.5 \text{ kg}$$

.... **[1]**

8) Réponse dans le **2)**. Si l'aire de la section d'écoulement augmente entre S_0 et S_1, la vitesse n'est pas verticale .... **[0.25]**

Exercice n°2 _ Puissance du vent



La puissance $\mathcal{P}$ d'un vent de vitesse v traversant une surface S est :

$$\mathcal{P} = q_v \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho S v^3$$

et pour un vent de 3 km/h, la puissance surfacique est :

$$\frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{1}{2}\rho v^3 = 0.358 \text{ W.m}^{-2}$$

et la puissance surfacique récupérée par une éolienne possédant un rendement de 45% est :

$$\frac{16}{27}\frac{45}{100}\frac{1}{2}\rho v^3 = 95.6 \text{ mW.m}^{-2}$$

et l'énergie surfacique récupérée par cette éolienne entre ces 2 instants est :

$$\begin{aligned}\frac{E}{S} = \frac{16}{27}\frac{45}{100}\frac{1}{2}\rho v^3 (t_1 - t_0) &= 344.16 \text{ J.m}^{-2} \text{ pour 1 h} \\ &= 95.6 \text{ mW.h.m}^{-2} \text{ pour 1 h}\end{aligned}$$

Au vu des données de vitesse et de laps de temps, l'énergie surfacique récupérée en 3h=10800 s où le vent a pour intensité nv (avec $v = 3$ km/h ≈ 0.83 m.s^{-1}) est :

$$\frac{E_i}{S} = 10800 \frac{16}{27}\frac{45}{100}\frac{1}{2}\rho {n_i}^3 v^3$$

1	2	3	4	5	6	7	8	$= i$
00 h.	03 h.	06 h.	09 h.	12 h.	15 h.	18 h.	21 h.	
8*3	3*3	6*3	5*3	6*3	13*3	9*3	10*3	km/h

et l'énergie surfacique récupérée sur toute la journée est :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8} \frac{E_i}{S} &= 10800 \frac{16}{27}\frac{45}{100}\frac{1}{2}\rho v^3 \sum_{i=1}^{8} {n_i}^3 \\ &= 10800 \frac{16}{27}\frac{45}{100}\frac{1}{2}\rho v^3 \underbrace{(8^3 + 3^3 + 6^3 + 5^3 + 6^3 + 13^3 + 9^3 + 10^3)}_{=5022} \\ &= 5189.4 \text{ kJ.m}^{-2} \\ &= 1441.5 \text{ W.h.m}^{-2}\end{aligned}$$

Un consommation d'énergie de 7700 kWh = 27720 MJ = 365*21095 Wh en 365 jours revient en moyenne à 75945 kJ = 21095 Wh par jour. La surface nécessaire est obtenue par :

$$\frac{75945}{5189} = \frac{21095}{1441.5} = 14.6 \text{ m}^2$$

soit un diamètre de 4.3 m.