**Exercice n°1 – 3.5 pts**

En écrivant Bernoulli entre la sortie $O$ du jet et le haut 1 du jet on a :

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2$$

où les pressions $p_1$ et $p_0$ sont atmosphériques,
où les vitesses $v_1 = 0$ et $v_0$ est celle à la base du jet,
où $z_1 - z_0 = H$ donc :

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gH} = 52.4 \text{ m.s}^{-1}$$

Le débit volumique du jet est :

$$q_v = v_0 \frac{\pi D^2}{4} = 0.498 \text{ m}^3.\text{s}^{-1} = 498 \text{ l.s}^{-1}$$

L'eau possède, en sortie de jet, l'énergie volumique :

$$X = \frac{1}{2}\rho {v_0}^2 = \rho g H = 1373.4 \text{ kJ.m}^{-3}$$

donc la puissance :

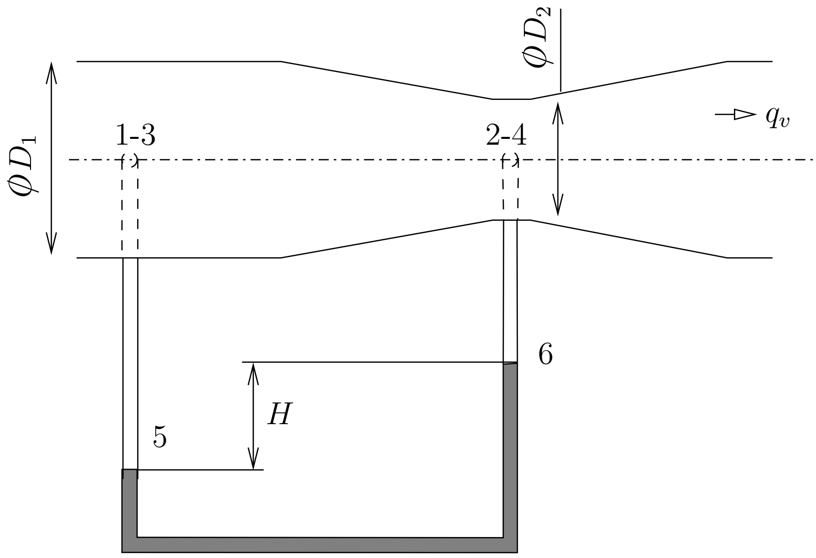
$$\mathcal{P} = q_v X = 684 \text{ kW}$$

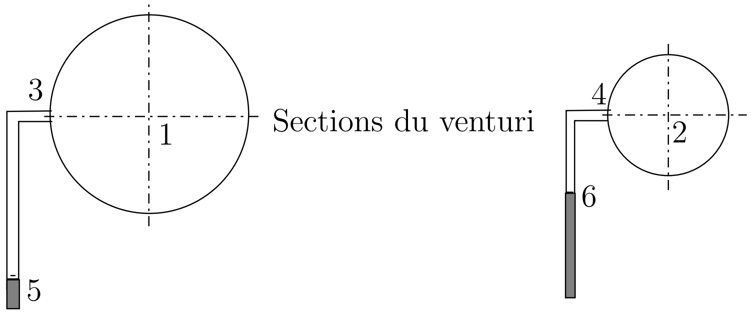
La pression effective $p_{Ar} - p_a$ en un point d'arrêt sur une plaque située à la distance $h = 1$ m de la sortie du jet est déterminée par Bernoulli :

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_{Ar} + \rho g h$$

$$\Longrightarrow \quad p_{Ar} - p_a = \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho g h = \rho g(H - h) = 1373.4 \text{ kJ.m}^{-3} - 9,81 \text{ kJ.m}^{-3} = 1363.59 \text{ kPa} = 13.6 \text{ bar}$$

**Exercice n°2 – 10 pts**




Bernoulli sur le tube de courant 1-2 donne :

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{{v_1}^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{{v_2}^2}{2} \quad \text{avec} \quad z_1 = z_2$$

L'équation de la statique des fluides dans l'eau donne :

$$p_3 + \rho g z_3 = p_5 + \rho g z_5 \quad \text{et} \quad p_4 + \rho g z_4 = p_6 + \rho g z_6$$

L'équation de la statique des fluides dans le mercure donne :

$$p_5 + \rho' g z_5 = p_6 + \rho' g z_6$$

Et la pression varie peu dans chaque section :

$$p_1 = p_3 \quad \text{et} \quad p_2 = p_4$$

La conservation du débit volumique donne :

$$q_v = S_1 v_1 = \frac{\pi}{4} {D_1}^2 v_1 = S_2 v_2 = \frac{\pi}{4} {D_2}^2 v_2 \quad \Longrightarrow \quad v_i = \frac{4 q_v}{\pi {D_i}^2}$$

En exploitant toutes ces équations, il vient :

$$\begin{aligned}
p_3 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 &= p_4 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \\
p_5 + \rho g(z_5 - z_3) + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 &= p_6 + \rho g(z_6 - z_4) + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \\
p_6 + \rho' g(z_6 - z_5) + \rho g(z_5 - z_3) + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 &= p_6 + \rho g(z_6 - z_4) + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \\
\rho' g(z_6 - z_5) + \rho g(z_5 - z_3 - z_6 + z_4) &= \frac{1}{2}\rho({v_2}^2 - {v_1}^2) \\
(\rho' - \rho) g(z_6 - z_5) &= \frac{1}{2}\rho({v_2}^2 - {v_1}^2) \\
(\rho' - \rho) gH &= \frac{1}{2}\rho\frac{16{q_v}^2}{\pi^2}(\frac{1}{{D_2}^4} - \frac{1}{{D_1}^4}) \\
(\rho' - \rho) gH &= \rho\frac{8{q_v}^2}{\pi^2}\frac{{D_1}^4 - {D_2}^4}{{D_1}^4{D_2}^4} \\
\frac{(\rho' - \rho)\pi^2 gH{D_1}^4{D_2}^4}{8\rho({D_1}^4 - {D_2}^4)} &= {q_v}^2 \\
\Longrightarrow \quad q_v &= \pi {D_1}^2{D_2}^2\sqrt{\frac{(\rho' - \rho)gH}{8\rho({D_1}^4 - {D_2}^4)}}
\end{aligned}$$

$q_v = 2.26 \text{ l.s}^{-1} = 135 \text{ l/mn}$ , $v_1 = 1.15 \text{ m.s}^{-1}$ , $v_2 = 3.20 \text{ m.s}^{-1}$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{v_1 D_1}{\nu} = 57557 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{v_2 D_2}{\nu} = 95929$$

$\mathcal{R} > 2000$ : l'écoulement est turbulent.

**Exercice n°3 _ 6.5 pts**

La coupelle (1) "remonte" le vent $v$ à la vitesse $\Omega R$, elle subit un vent relatif $v+\Omega R$ dont une force :

$$T_1 = \frac{1}{2}\rho S C_{x1}(v+\Omega R)^2$$

La coupelle (2) "descend" le vent $v$ à la vitesse $\Omega R$, elle subit un vent relatif $v-\Omega R$ dont une force :

$$T_2 = \frac{1}{2}\rho S C_{x2}(v-\Omega R)^2$$

Le moment sur l'axe de rotation dû à ces 2 forces est alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= (T_2 - T_1)R = \frac{1}{2}\rho S\left[C_{x2}(v-\Omega R)^2 - C_{x1}(v+\Omega R)^2\right]R \\ &= \frac{1}{2}\rho S C_{x1}\left[3(v-\Omega R)^2 - (v+\Omega R)^2\right]R\end{aligned}$$

La puissance fournie par le vent à cet anémomètre lorsqu'il est dans la position de la figure est alors :

$$\mathcal{P} = \mathcal{C}\Omega = \frac{1}{2}\rho S C_{x1}\left[3(v-\Omega R)^2 - (v+\Omega R)^2\right]\Omega R$$

$$\text{soit } A = \frac{1}{2}\rho S C_{x1} = 3.906\,10^{-5}\ \text{kg.m}^{-1}$$

et en posant $x = \frac{\Omega R}{v}$ on a :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_{x1}\left[3(1-x)^2 - (1+x)^2\right]xv = \frac{1}{2}\rho S C_{x1}\left[3(1-x)^2 - (1+x)^2\right]xv^3$$

Sur un tour de fonctionnement, la puissance moyenne fournie à l'anémomètre est proportionnelle à la puissance déterminée précédemment à un instant particulier soit :

$$\mathcal{P}_{moy} = k\mathcal{P} = kA\left[3(1-x)^2 - (1+x)^2\right]xv^3 = kAf(x)v^3$$

Etudions l'évolution de $f(x) = [3(1-x)^2 - (1+x)^2]\,x = \mathcal{P}_{moy}/(kAv^3)$ avec $x$ :

$$\begin{aligned}f'(x) &= [-6(1-x) - 2(1+x)]\,x + \left[3(1-x)^2 - (1+x)^2\right] \\ &= (-8+4x)x + 3(1-x)^2 - (1+x)^2 \\ &= -8x + 4x^2 + 3 - 6x + 3x^2 - 1 - 2x - x^2 \\ &= 6x^2 - 16x + 2 = 2(3x^2 - 8x + 1)\end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ nous fait considérer le discriminant : $\Delta = 64 - 12 = 52 \approx 7.21^2 > 0$
Les racines sont : $\frac{1}{6}[8 \pm 7.21]$ et la seule logique comprise entre $[0 : 1]$ est $x = 0.131$ et l'on a alors $f(0.131) = 0.129$.

Pour $v = 6$ m.s$^{-1}$, la puissance moyenne sera maximum lorsque $\Omega R \approx 0.131v$ soit $\Omega = 15.7$ rd.s$^{-1}$ $= 150$ tr/mn et aura pour valeur $\mathcal{P}_{moy\,Max} = 0.129kAv^3 = 0.381$ mW.