Exercice n°1 – 8 pts

Bernoulli sur le tube de courant 1-2 donne :

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{{v_1}^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{{v_2}^2}{2} \quad \text{avec} \quad z_1 = z_2$$

L'équation de la statique des fluides donne :

$$\begin{aligned} p_3 + \rho g z_3 &= p_5 + \rho g z_5 \\ p_4 + \rho g z_4 &= p_6 + \rho g z_6 \\ p_5 + \rho' g z_5 &= p_6 + \rho' g z_6 \end{aligned}$$

Et la pression varie peu dans chaque section :

$$p_1 \approx p_3 \quad \text{et} \quad p_2 \approx p_4$$

La conservation du débit volumique donne :

$$q_v = S_1 v_1 = \frac{\pi}{4}{D_1}^2 v_1 = S_2 v_2 = \frac{\pi}{4}{D_2}^2 v_2 \quad \Longrightarrow \quad v_i = \frac{4q_v}{\pi {D_i}^2}$$

En exploitant toute ces équations il vient :

$$\begin{aligned} p_3 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 &= p_4 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \\ p_5 + \rho g(z_5 - z_3) + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 &= p_6 + \rho g(z_6 - z_4) + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \\ p_6 + \rho' g(z_6 - z_5) + \rho g(z_5 - z_3) + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 &= p_6 + \rho g(z_6 - z_4) + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \\ \rho' g(z_6 - z_5) + \rho g z_5 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 &= \rho g z_6 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 \\ (\rho' - \rho) g (z_6 - z_5) &= \frac{1}{2}\rho({v_2}^2 - {v_1}^2) \\ \left(\frac{4q_v}{\pi {D_2}^2}\right)^2 - \left(\frac{4q_v}{\pi {D_1}^2}\right)^2 &= 2\frac{(\rho' - \rho)}{\rho} g h \\ \left(\frac{4q_v}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right) &= 2\frac{(\rho' - \rho)}{\rho} g h \\ q_v^2 \frac{D_1^4 - D_2^4}{D_2^4 D_1^4} &= 2\frac{(\rho' - \rho)}{\rho} g h \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

$$q_v = \frac{\pi}{4}(D_2^2 D_1^2)\sqrt{\frac{(\rho' - \rho)}{\rho}\frac{2gh}{(D_1^4 - D_2^4)}} \quad \text{ou} \quad q_v = \sqrt{\frac{(\rho' - \rho)}{\rho}\frac{2gh}{\left(\frac{1}{{S_2}^2} - \frac{1}{{S_1}^2}\right)}}$$

$q_v = 1.001$ l.s^{-1} , $v_1 = 1.885$ m.s^{-1} , $v_2 = 4.979$ m.s^{-1}

$$\mathcal{R}_1 = \frac{v_1 D_1}{\nu} = 49028 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{v_2 D_2}{\nu} = 79670$$

$\mathcal{R} > 2000$: l'écoulement est turbulent.

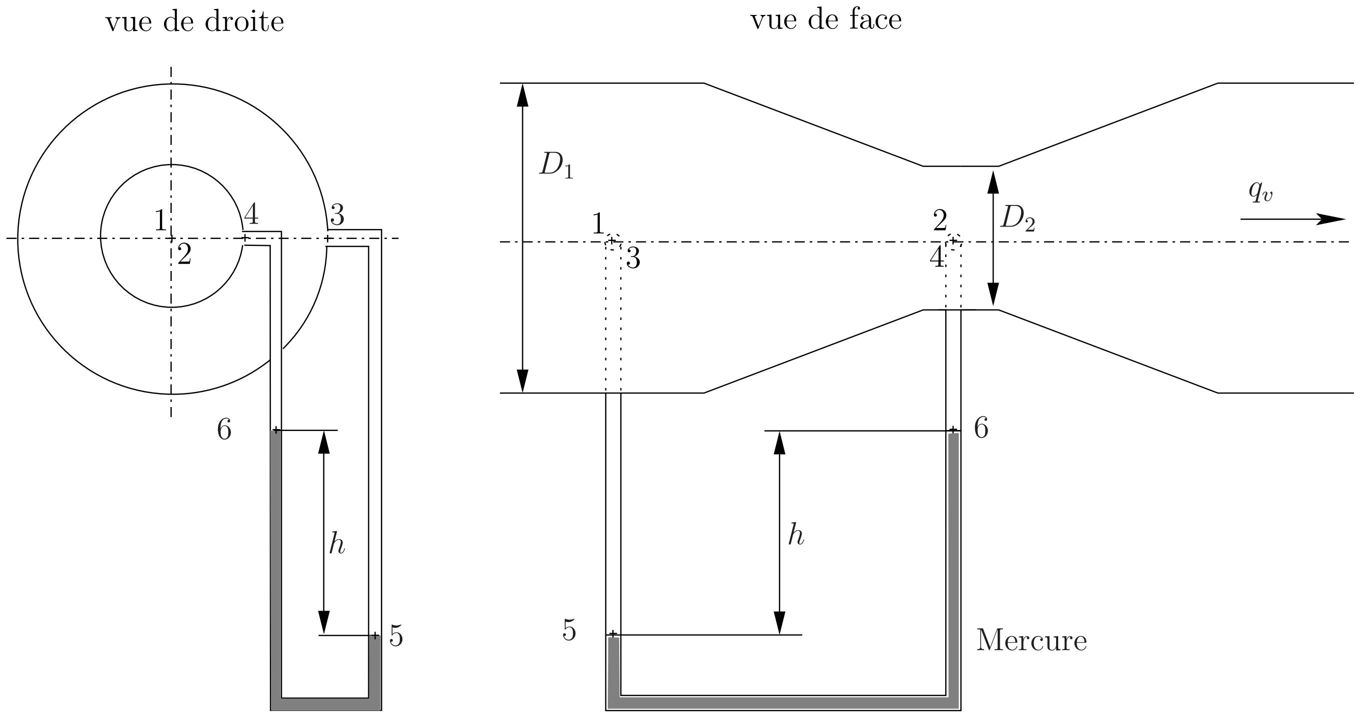
N.B.

L'expression de la vitesse est :

$$v_1 = \sqrt{\frac{(\rho' - \rho)}{\rho} \frac{2gh}{\left(\frac{S_1{}^2}{S_2{}^2} - 1\right)}}$$

Ici ρ' n'est pas négligeable par rapport à ρ. Dans le cas où $\rho' \ll \rho$, on commet une faible erreur de 3.9% sur l'évaluation des vitesses et débit :

$$v_1 = \sqrt{\frac{\rho'}{\rho} \frac{2gh}{\left(\frac{S_1{}^2}{S_2{}^2} - 1\right)}} = 1.96 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{ou} \quad q_v = \sqrt{\frac{\rho'}{\rho} \frac{2gh}{\left(\frac{1}{S_2{}^2} - \frac{1}{S_1{}^2}\right)}} = 1.040 \text{ l.s}^{-1}$$



Exercice n°2 – 4 pts

$S = 14$ m^2 ; $M = 400$ kg ; $\rho = 1,24$ kg.m^{-3} ; $v = 16,1$ m.s^{-1} ; $\mathcal{P} = 0.6\mathcal{P}_{Maxi} = 10598$ W

La portance des ailes compense le poids de l'avion :

$$P = \frac{1}{2}\rho S C_z v^2 = Mg \quad \Longrightarrow \quad C_z = 1.741$$

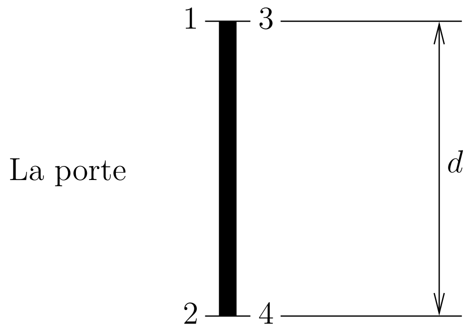
La puissance fournie par l'hélice permet de vaincre la puissance perdue par la trainée des ailes :

$$\mathcal{P} = Tv = \frac{1}{2}\rho S C_x v^3 \quad \Longrightarrow \quad C_x = 0.292 \quad \Longrightarrow \quad finesse = \frac{C_z}{C_x} = 5.965$$

N.B. Ceci n'est qu'une estimation car la trainée du fuselage et la portance des gouvernes arrières n'ont pas été considérées.

$$P = 3920 \text{ N} \qquad \text{et} \qquad T = 658 \text{ N}$$

Exercice n°3 – 8 pts



Les pressions effectives en haut et bas de part et d'autre de la porte sont :

$$p_{e1} = \rho_1 g(H-d) = 25872 \text{ Pa} \qquad p_{e2} = \rho_1 gH = 39200 \text{ Pa}$$
$$p_{e3} = \rho_2 g(h-d) = 10780 \text{ Pa} \qquad p_{e4} = \rho_2 gh = 27440 \text{ Pa}$$

Elles permettent de représenter les forces réparties effectives exercées par chacun des 2 liquides. La somme de ces forces réparties permet de représenter la force répartie effective exercée par l'ensemble des 2 liquides qui est issue des pressions :

$$p_{e5} = p_{e1} - p_{e3} = 15092 \text{ Pa} \qquad p_{e6} = p_{e2} - p_{e4} = 11760 \text{ Pa}$$

Cette dernière force répartie est décomposée en :
- une force répartie constante issue de la pression p_{e6} qui engendre une force globale F_1 centrée sur la porte ;
- une force répartie variant linéairement de 0 à $p_{e5} - p_{e6}$ qui engendre une force globale F_2 au tiers supérieur de la porte.

$$F_1 = p_{e6}db = 19992 \text{ N} \qquad F_2 = \frac{1}{2}(p_{e5} - p_{e6})db = 2832 \text{ N}$$

La force exercée sur cette porte est :

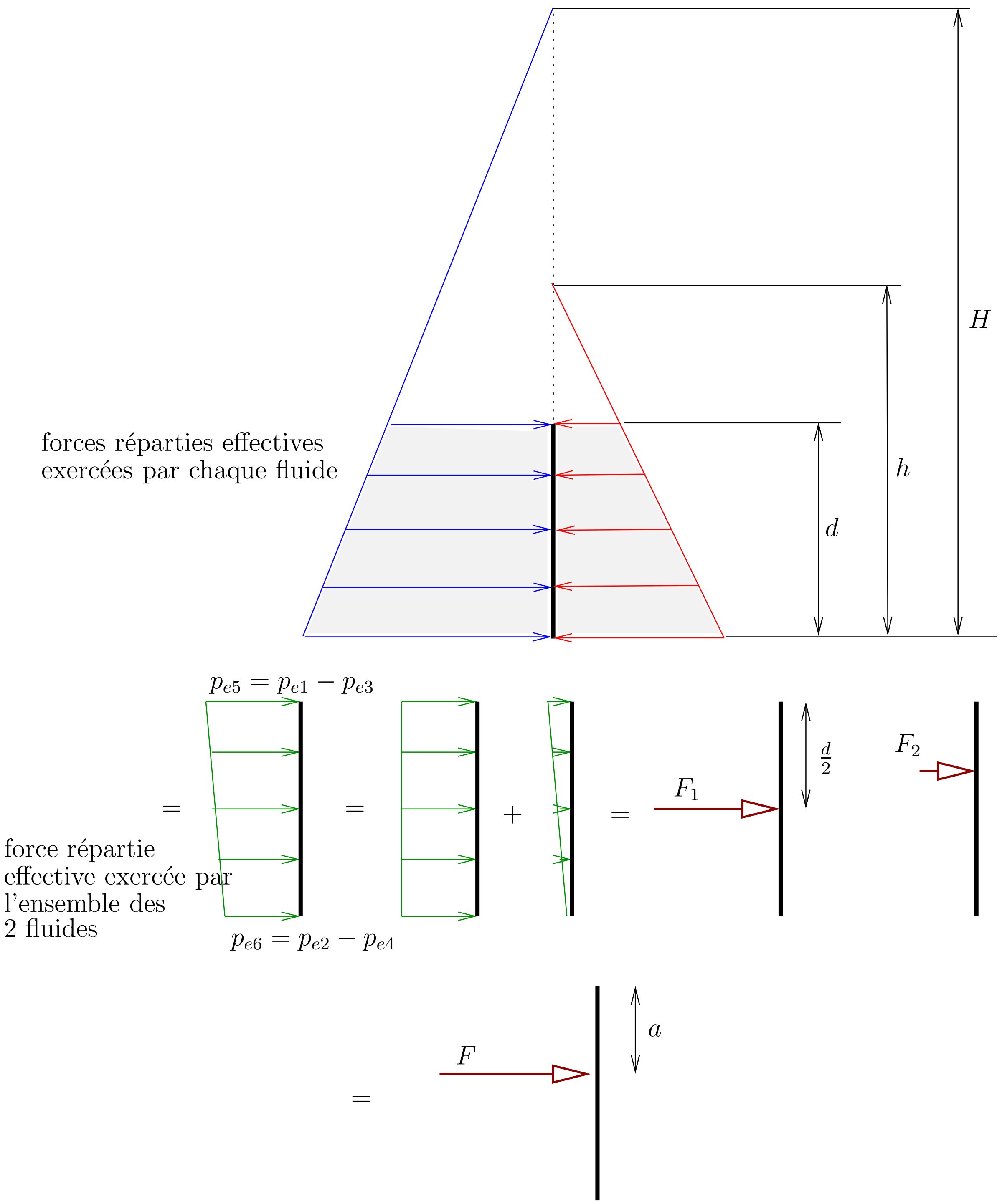
$$F = F_1 + F_2 = 22824 \text{ N}$$

Elle est positionnée à la cote a du haut de la porte telle que :

$$F_1\frac{d}{2} + F_2\frac{d}{3} = Fa \quad \Longrightarrow \quad a = 0.8148 \text{ m}$$

N.B. On trouve analytiquement :

$$F = \left[\rho_1\left(H - \frac{d}{2}\right) - \rho_2\left(h - \frac{d}{2}\right)\right] gdb$$



H
h
forces réparties effectives
exercées par chaque fluide
d
$p_{e5} = p_{e1} - p_{e3}$
=
=
+
=
F_1
$\frac{d}{2}$
F_2
$\frac{d}{3}$
force répartie
effective exercée par
l'ensemble des
2 fluides
$p_{e6} = p_{e2} - p_{e4}$
=
F
a

On pouvait décomposer autrement les forces réparties :