

Une nouvelle décomposition orthogonale : la cross HOSVD, application au STAP multidimensionnel

Maxime Boizard^{1,2}, Guillaume Ginolhac³, Frédéric Pascal², Philippe Forster¹

¹: SATIE, ²: SONDRRA, ³: LISTIC



Plan

Introduction

Rappels d'algèbre multilinéaire
STAP
Problématique

Cross-HOSVDs

Filtres STAP tensoriels

Résultats

Conclusion

Rappels d'algèbre multilinéaire

$$\mathcal{H}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{h_1 \times h_2 \times h_3}.$$

Déplissements

- En vecteur : $\text{vec}(\mathcal{H}) \in \mathbb{C}^{h_1 h_2 h_3}$
- En matrice : $[\mathcal{H}]_1 \in \mathbb{C}^{h_1 \times h_2 h_3}$, $[\mathcal{H}]_2 \in \mathbb{C}^{h_2 \times h_1 h_3}$.
- Cas particulier, tenseur hermitien $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{h_1 \times h_2 \times h_1 \times h_2}$

$$\text{SqMat}(\mathcal{R}) \in \mathbb{C}^{h_1 h_2 \times h_1 h_2}$$

Produit n -mode

Soit $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{j_2 \times j_2}$, une matrice :

$$\mathcal{H} = \mathcal{B} \times_1 \mathbf{D} \iff [\mathcal{A}]_1 = \mathbf{D}[\mathcal{B}]_1$$

HOSVD

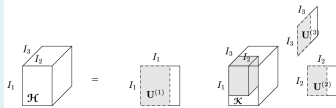
Définition

$$\mathcal{A} = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)}$$

- $\mathcal{K} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$: tenseur noyau.
- $\mathbf{U}^{(1)} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_1}$, $\mathbf{U}^{(2)} \in \mathbb{C}^{I_2 \times I_2}$, $\mathbf{U}^{(3)} \in \mathbb{C}^{I_3 \times I_3}$, orthogonales.
- $[\mathcal{A}]_i = \mathbf{U}^{(i)} \boldsymbol{\Sigma}^{(i)} \mathbf{V}^{(i)}$

Exemple

$$I_1 = M, I_2 = P \text{ et } I_3 = N$$



HOSVD

Approximation rang faible

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_0$$

- \mathcal{H}_c est un tenseur de rangs faibles (r_1, r_2, r_3) .
- $r_i = \text{rank}([\mathcal{H}_c]_i)$
- $\mathbf{U}_0^{(i)} = [u_{r_i+1} \dots u_{N_i}]$

$$\mathcal{H}_0 \approx \mathcal{H} \times_1 \mathbf{U}_0^{(1)} \mathbf{U}_0^{(1)H} \times_2 \mathbf{U}_0^{(2)} \mathbf{U}_0^{(2)H} \times_3 \mathbf{U}_0^{(3)} \mathbf{U}_0^{(3)H}$$

Introduction

STAP

- RADAR aéroporté.
- Détecter une cible mouvante noyée dans du fouillis.
- 2 Dimensions : spatiale et temporelle.
- détecter \mathbf{s} perturbé par \mathbf{d} au sein d'une observation $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{NM}$
- \mathbf{x}_k , K données secondaires

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{s} + \mathbf{d}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k$$

- $\mathbf{d}, \mathbf{d}_k \sim \mathcal{C} \mathcal{N}(0, \Sigma)$
- \mathbf{s} , le steering vector

Classic STAP filters

Optimal STAP filter

- $\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{s}$
- sortie du filtre : $y = | \langle \mathbf{w}_{opt}, \mathbf{x} \rangle |$

Filtre STAP rang faible

- $\mathbf{d} = \mathbf{c} + \mathbf{n}$, avec $\mathbf{n} \sim \mathcal{C} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{NM})$ et $\mathbf{c} \sim \mathcal{C} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$
- \mathbf{R} est de rang faible, r
- $EVD(\mathbf{\Sigma}) : (\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq NM}$
- $\mathbf{U}_0 = [\mathbf{e}_{r+1} \dots \mathbf{e}_{NM}]$
- $\mathbf{\Pi}_c^\perp = \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H$
- $\mathbf{w}_{lr} = \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{s}$
- sortie de filtre : $y = | \langle \mathbf{w}_{lr}, \mathbf{x} \rangle |$

Problématique

Comment traiter les données si le nombre de dimensions augmente ?

- STAP classique : 2 dimensions, $N \times M$
- De nouvelles dimensions peuvent être disponible : polarimétrie, MIMO, ...
- STAP polarimétrique : 3 dimensions, $N \times M \times 3$

Approche classique

Mettre les données sous forme de vecteurs

- STAP classique : NM
 - STAP polarimétrique : $3NM$
- ⇒ Perte de structure et de performance

Problématique

Solution

- Conserver la structure des données grâce aux tenseurs
- Utiliser l'algèbre multilinéaire
- Etendre le filtre rang faible au cas tensoriel

Moyen

- HOSVD \Rightarrow orthogonale.
- Elle ne prend en compte que les dimensions simples. \Rightarrow **La HOSVD n'est pas appropriée.**
- Introduction d'une nouvelle décomposition : la cross-HOSVD

Plan

Introduction

Cross-HOSVDs

Filtres STAP tensoriels

Résultats

Conclusion

Cross-HOSVDs

Nouvelle notation

- $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{I_1, I_2, \dots, I_P}$
- $\mathbb{A} = \{I_1, \dots, I_P\}$, \mathbb{A}_l un sous ensemble de \mathbb{A} ($\mathbb{A}_l = \{I_1, I_5, I_P\}$ par ex)
- soit $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_L$ tels que :

$$\mathbb{A}_1 \cup \dots \cup \mathbb{A}_L = \mathbb{A},$$

$$\mathbb{A}_1 \cap \dots \cap \mathbb{A}_L = \emptyset.$$

Nouveau dépliement

- $[\mathcal{H}]_{\mathbb{A}_l} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}_l \times \mathbb{A} \setminus \mathbb{A}_l}$
- exemple : $\mathbb{A}_1 = \{I_1, I_3\} \Rightarrow [\mathcal{H}]_{\mathbb{A}_1} \in \mathbb{C}^{I_1 I_3 \times I_2}$

Cross-HOSVDs

Produit multimode

□ $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}_I \times \mathbb{A}_I}$

$$\mathbf{B} = \mathcal{H} \times_{\mathbb{A}_I} \mathbf{D}$$
$$\iff [\mathbf{B}]_{\mathbb{A}_I} = \mathbf{D}[\mathcal{H}]_{\mathbb{A}_I},$$

Reshape

□ Réarrange un tenseur en un tenseur d'ordre inférieur,
 $\text{Reshape}(\mathcal{H}, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3) \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times \mathbb{A}_3}$

Cross-HOSVDs

Définition

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1/\dots/\mathbb{A}_L} \times_{\mathbb{A}_1} \mathbf{U}^{(\mathbb{A}_1)} \dots \times_{\mathbb{A}_L} \mathbf{U}^{(\mathbb{A}_L)}, L \leq P, \\ \mathbb{A}_1 \cup \dots \cup \mathbb{A}_L &= \mathbb{A}, \\ \mathbb{A}_1 \cap \dots \cap \mathbb{A}_L &= \emptyset,\end{aligned}$$

- $\forall l \in [1, L], \mathbf{U}^{(\mathbb{A}_l)} \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}_l \times \mathbb{A}_l}$ est orthogonale
- $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_1/\dots/\mathbb{A}_L}$ est le tenseur noyau avec des propriétés identiques à celui de la HOSVD

Cross-HOSVDs

Approximation rang faible

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_0,$$

- \mathcal{H}_c is a $(r_{\mathbb{A}_1}, \dots, r_{\mathbb{A}_L})$ low rank tensor
- $r_{\mathbb{A}_l} = \text{rank}([\mathcal{H}_c]_{\mathbb{A}_l})$

$$\mathcal{H}_0 \approx \mathcal{H} \times_{\mathbb{A}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_1)H} \dots \times_{\mathbb{A}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_L)H}$$

Lien avec la HOSVD

$$\text{Reshape}(\mathcal{H}, \mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_L) = \text{Reshape}(\mathcal{K}_{\mathbb{A}_1/\dots/\mathbb{A}_L}, \mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_L) \times_1 \mathbf{U}^{(\mathbb{A}_1)} \dots \times_L \mathbf{U}^{(\mathbb{A}_L)}.$$

Plan

Introduction

Cross-HOSVDs

Filtres STAP tensoriels

Résultats

Conclusion

Filtres STAP tensoriels

Modèle

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \alpha \mathcal{S} + \mathcal{D} \\ \mathcal{X}_k &= \mathcal{D}_k \quad k \in [1, K].\end{aligned}$$

- $\mathcal{X}, \mathcal{X}_k, \mathcal{D}, \mathcal{D}_k \in \mathbb{C}^{I_1 \times \dots \times I_p}$
- $\mathcal{R} = E[\mathcal{D} \circ \mathcal{D}^*] = \mathcal{R}_c + \sigma^2 \mathcal{J}_{I_1 \dots I_p}$

Filtre optimal

$$\mathcal{W}_{opt} = \text{vec}^{-1}(\text{SqMat}(\mathcal{R})^{-1} \text{vec}(\mathcal{S})).$$

Filtres STAP tensoriels

Filtres STAP tensoriels rang faible

- Décomposition de \mathcal{R} avec la cross-HOSVD :

$$\mathcal{R} = \mathcal{K}_{\mathbb{A}_1/\dots/\mathbb{A}_{2L}} \times_{\mathbb{A}_1} \mathbf{U}^{(\mathbb{A}_1)} \dots \times_{\mathbb{A}_L} \mathbf{U}^{(\mathbb{A}_L)} \times_{\mathbb{A}_{L+1}} \mathbf{U}^{(\mathbb{A}_1)*} \dots \times_{\mathbb{A}_{2L}} \mathbf{U}^{(\mathbb{A}_L)*}$$

- Estimation de $r_{\mathbb{A}_1}, \dots, r_{\mathbb{A}_L}$
- Troncature des $\mathbf{U}^{(\mathbb{A}_l)}$ en $\mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_l)} = [\mathbf{u}_{r_{\mathbb{A}_l}+1}^{(\mathbb{A}_l)}, \dots, \mathbf{u}_{\text{size}(\mathbf{U}^{(\mathbb{A}_l)})}^{(\mathbb{A}_l)}]$
- Projection orthogonale :

$$\mathcal{X} \times_{\mathbb{A}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_1)H} \dots \times_{\mathbb{A}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_L)H} \approx \alpha \mathcal{S} + \mathcal{N}$$

- Filtre rang faible :

$$\mathcal{W}_{lr(\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_P)} = \mathcal{S} \times_{\mathbb{A}_1} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_1)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_1)H} \dots \times_{\mathbb{A}_L} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_L)} \mathbf{U}_0^{(\mathbb{A}_L)H}$$

$$y = | \langle \mathcal{W}_{\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_P}, \mathcal{X} \rangle |$$

Filtres STAP tensoriels

Remarques

- Similaire au cas vectoriel
- Différents filtres obtenues selon le choix de $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_L$
- Possibilité de retrouver le filtre vectoriel et le filtre obtenue avec la HOSVD

Plan

Introduction

Cross-HOSVDs

Filtres STAP tensoriels

Résultats

Conclusion

STAP Polarimétrique

Modèle

- 3 canaux de polarisation : HH, VV, HV
- Tenseur d'ordre 3 : $\mathcal{X}, \mathcal{X}_k \in \mathbb{C}^{M \times N \times 3}$

$$\mathcal{S}(\theta, \nu) = \text{vec}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{HH}(\theta, \nu) \\ \alpha_{VV} \mathbf{s}_{HH}(\theta, \nu) \\ \alpha_{VH} \mathbf{s}_{HH}(\theta, \nu) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R} = \text{SqMat}^{-1}(\mathbf{R}_{pc} + \sigma^2 \mathbf{I}_{3MN}),$$

$$\mathbf{R}_{pc} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_c & \rho \sqrt{\gamma_{VV}} \mathbf{R}_c & \mathbf{0} \\ \rho^* \sqrt{\gamma_{VV}} \mathbf{R}_c & \gamma_{VV} \mathbf{R}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma_{VH} \mathbf{R}_c \end{pmatrix},$$

STAP Polarimétrie

Filtres

5 filtres

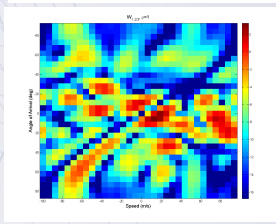
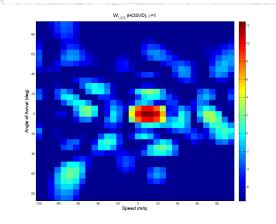
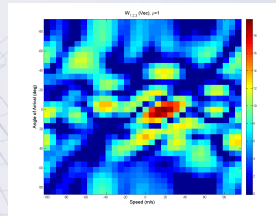
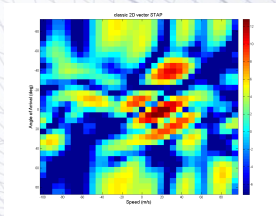
- $\mathcal{W}_{lr(1,2,3)}, \mathbb{A}_1 = \{M, N, 3\}$, $r_{1,2,3}$, équivalent du filtre vectoriel
- $\mathcal{W}_{lr(1/2/3)}, \mathbb{A}_1 = \{M\}$, $\mathbb{A}_2 = \{N\}$, $\mathbb{A}_3 = \{3\}$, r_1, r_2, r_3 , équivalent de la HOSVD
- $\mathcal{W}_{lr(1,2,3)}, \mathbb{A}_1 = \{M, N\}$, $\mathbb{A}_2 = \{3\}$, $r_{1,2}$ and r_3 .
- $\mathcal{W}_{lr(1/2,3)}, \mathbb{A}_1 = \{M\}$, $\mathbb{A}_2 = \{N, 3\}$ et $\mathcal{W}_{lr(1,3/2)}, \mathbb{A}_1 = \{M, 3\}$, $\mathbb{A}_2 = \{N\} \Rightarrow$ non utilisés

STAP Polarimétrique

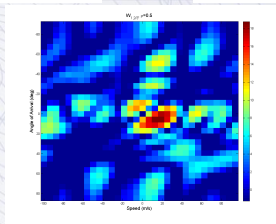
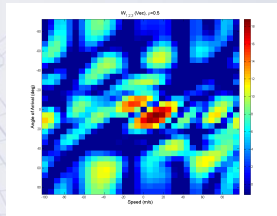
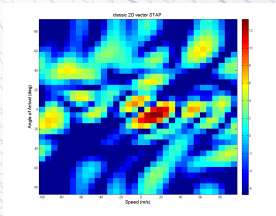
Paramètres de simulation

- caractéristiques de la cible : $\theta = 0^\circ$, $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$
- $M = 8$, $N = 8$,
- $SNR = 45\text{dB}$, $CNR = 88\text{dB}$
- 2 scénarios :
 - ▶ $\rho = 1$: $r_3 = 2$, $r_{1,2} = 15$, $r_{1,2,3} = 30$
 - ▶ $\rho = 0.5$: $r_3 = 3$, $r_{1,2} = 15$, $r_{1,2,3} = 45$
 - ▶ $K = 2r_{1,2,3}$

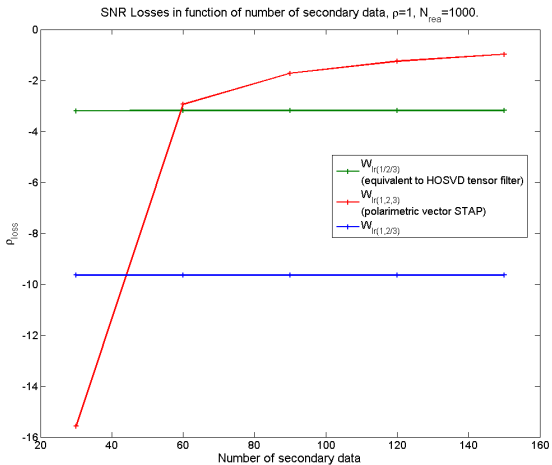
STAP Polarimétrique, Simulations, $\rho = 1$



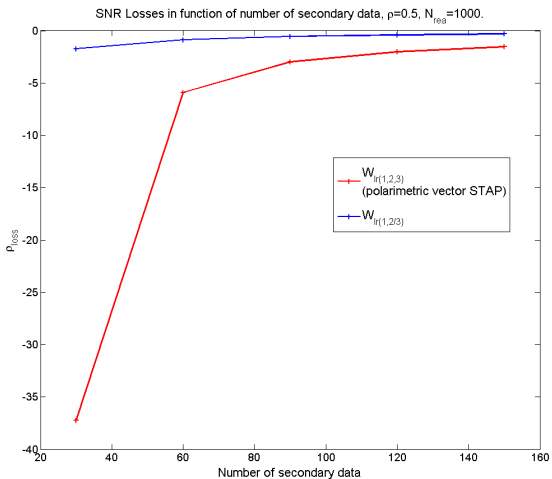
STAP Polarimétrique, Simulations, $\rho = 0.5$



STAP Polarimétrique, SNR losses



STAP Polarimétrique, SNR losses



Plan

Introduction

Cross-HOSVDs

Filtres STAP tensoriels

Résultats

Conclusion

Conclusion

Conclusion

- Nouvelle décomposition
 - ▶ permet de prendre en compte les infos contenues dans une combinaison de dimensions
 - ▶ propriétés analogues à la HOSVD
- Filtres STAP tensoriels
 - ▶ Généralisation du cas vectoriel
 - ▶ Choix du filtre \Rightarrow dépend des données

Perspectives

- Approximation rang faible \Rightarrow ALS pour mieux estimer les $\mathbf{U}_0^{A_i}$
- Choix du filtre \Rightarrow Proposer un critère