Goniométrie ou l'estimation d'incidences d'ondes radio

Miniprojet - Licence 1 MIEE

Laboratoire LTSI - UMR INSERM 642 - Université de Rennes 1

1 Le contexte applicatif

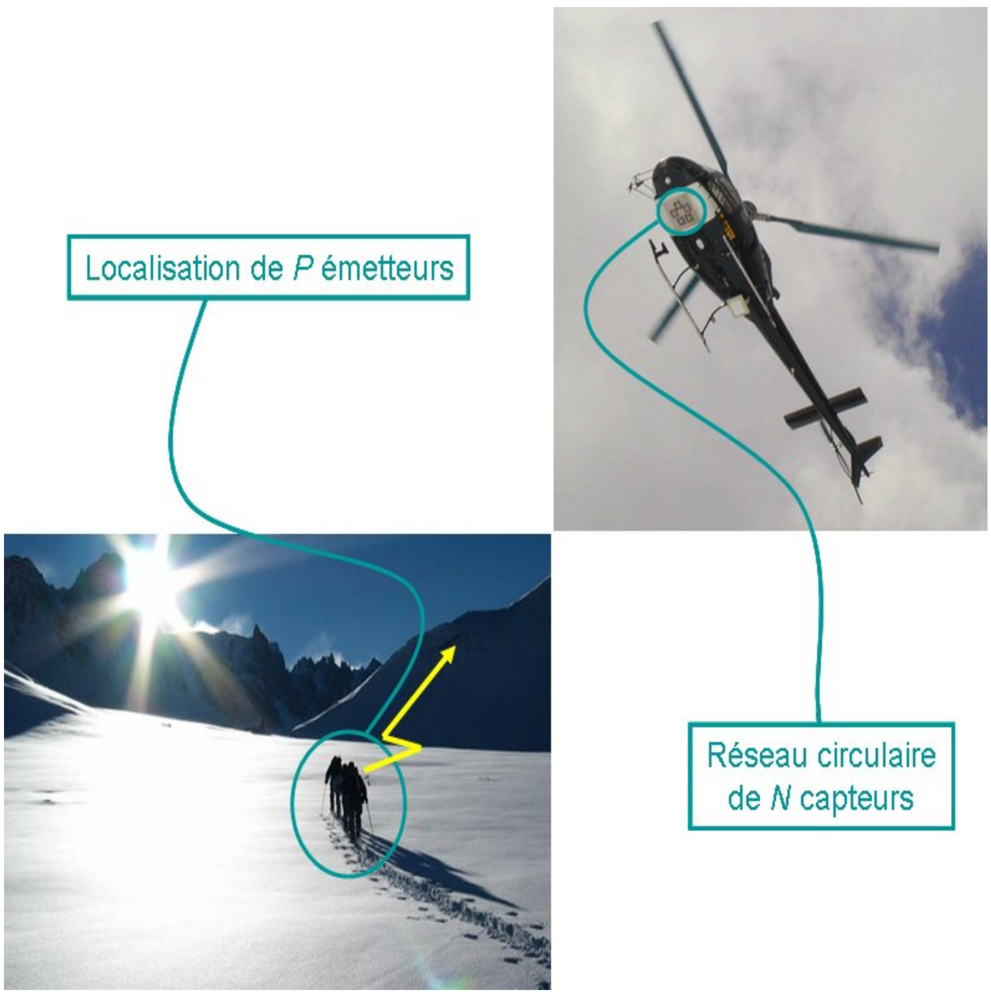

Figure 1: Localisation de téléphones portables sous la neige à partir de moyens aéroportés

Au début des années 2000, le projet RNRT LUTECE a conduit THALES Communications à travailler sur la localisation de téléphones portables enfouis sous la neige comme illustré à la figure 1. Cette localisation d'émetteurs à partir de moyens aéroportés nécessitait l'estimation des directions d'arrivées (ou angles d'incidence) des ondes radio captées par l'antenne de réception. La figure 2 montre les deux angles d'incidence d'une onde radio plane arrivant sur un capteur. Les résultats de ce travail avaient pour objectif de faciliter la recherche d'alpinistes/skieurs pris au piège sous une avalanche.

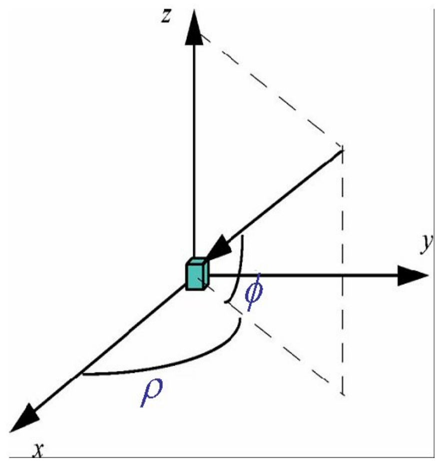

Figure 2: Direction d'arrivée d'une onde radio

2 Formalisation du problème

Soit N le nombre de capteurs (ou patchs) embarqués sous l'hélicoptère (voir figure 1). Soit $\boldsymbol{x}(t)$ le vecteur colonne de longueur N d'observations (ou de mesures) enregistrées à l'instant t par l'hélicoptère. Effectuant ces enregistrements vectoriels $\boldsymbol{x}(t)$ à K instants différents, rangeons ces derniers dans une matrice $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{x}(t_2), \ldots, \boldsymbol{x}(t_K)]$ de taille $(N \times K)$. Ainsi, la n-ième ligne de $\boldsymbol{X}$ correspond au signal enregistré par le n-ième patch durant la période d'enregistrement de longueur K. Dans la suite, on se limitera à l'estimation des directions d'arrivée de $P = 1$ émetteur. Nous noterons $\boldsymbol{s} = [s(t_1), s(t_2), \ldots, s(t_K)]$ l'onde radio de l'émetteur arrivant sur le réseau de capteurs durant la période d'observation de longueur K. En travaillant avec les enveloppes complexes des signaux et en supposant que le signal $\boldsymbol{s}$ est à bande étroite, on peut faire l'approximation suivante :

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)\, \boldsymbol{s} \tag{1}$$

où le vecteur $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)$ de taille $(N \times 1)$ et le vecteur $\boldsymbol{\theta}_0 = [\rho_0, \phi_0]^{\mathsf{T}}$ de taille (2×1) sont respectivement appelés *vecteur directeur* et *direction d'arrivée* de l'onde radio $\boldsymbol{s}$. Par ailleurs, on suppose que l'antenne positionnée sous l'hélicoptère a été préalablement calibrée, c'est-à-dire que l'on dispose d'une grille matricielle $\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{\theta}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\theta}^{(M)}]$ de taille $(N \times M)$ de M vecteur directeurs associés respectivement à M directions d'arrivées. Il va de soit que plus la grille $\boldsymbol{G}$ sera fine, et plus la résolution du problème suivant sera précise :

Problème 1 *Identifier la direction d'arrivée $\boldsymbol{\theta}_0$ de l'onde radio $\boldsymbol{s}$ uniquement à partir des matrices $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{G}$.*

3 Résolution algorithmique du problème

Notons $\boldsymbol{R_x}$ la matrice de taille $(N \times N)$ définie par $\boldsymbol{R_x} = \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{X}^{\mathsf{H}}$ où $\boldsymbol{X}^{\mathsf{H}}$ est la transposée hermitienne de $\boldsymbol{X}$. D'après l'équation (1), on a alors :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R_x} &= \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{X}^{\mathsf{H}} \\
&= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)\,\boldsymbol{s}\,\boldsymbol{s}^{\mathsf{H}}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)^{\mathsf{H}} \\
&= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)\,||\boldsymbol{s}||^2\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)^{\mathsf{H}} \\
\boldsymbol{R_x} &= ||\boldsymbol{s}||^2\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)^{\mathsf{H}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

L'équation (2) nous permet d'affirmer que la matrice $\boldsymbol{R_x}$ est diagonalisable et qu'elle possède une et une seule valeur propre non nulle. On peut également montrer d'après (2) que le vecteur $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)$ est colinéaire au vecteur propre associé à la valeur propre non nulle de $\boldsymbol{R_x}$.

Question 1 *Proposer une méthode pour résoudre le problème 1.*

Réponse 1 *Soit $\boldsymbol{v}$ le vecteur propre normalisé associé à la valeur propre dominante (la seule non nulle dans le cas présent) de $\boldsymbol{R_x}$. Comme nous l'avons dit précédemment, $\boldsymbol{v}$ est alors colinéaire au vecteur directeur $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$ non nuls peut s'écrire sous la forme :*

$$\frac{|\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\rangle|^2}{\|\boldsymbol{e}\|^2 \|\boldsymbol{f}\|^2} \leq 1 \tag{3}$$

avec égalité si et seulement si $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$ sont colinéaires. On en déduit alors la fonction de coût suivante :

$$\Psi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta})) = \frac{|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta})\rangle|^2}{\|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}\|^2} = \frac{|\boldsymbol{v}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta})|^2}{\|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}\|^2} = \frac{|\boldsymbol{v}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta})|^2}{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta})^{\mathsf{H}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta})} \tag{4}$$

maximale et égale à 1 si et seulement si $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$.

4 Mise en oeuvre de la solution

Cette implémentation de l'algorithme se fera au choix sous Matlab (utilisé durant les séances de TP et disponible dans les salles de TP du bâtiment 6 en accès libre) ou bien sous Scilab (clône de Matlab) dont une version gratuite est téléchargeable à l'adresse http://www.scilab.org/. Une introduction à Scilab est proposée à l'adresse http://www-syscom.univ-mlv.fr/~pesquet/sigdi/tpinit1.pdf.

De plus, on suppose dans la suite que l'angle d'élévation ϕ, représenté sur la figure 2, est nul. Autrement dit, on suppose que l'onde radio dont on veut identifier la direction d'arrivée se propage uniquement dans le plan $\widehat{x0y}$. Cette restriction a pour objectif ici de réduire le coût de calcul de la méthode mise en oeuvre afin de pouvoir en étudier rapidement les performances. On supposera également disposer d'un réseau linéaire de $N = 3$ capteurs equiespacés disposés sur l'axe $(0x)$ aux positions respectives $(0, 0, 0)$, $(R/2, 0, 0)$ et $(R, 0, 0)$. On considèrera dans la suite $R/\lambda = 0.5$ où λ est la longueur d'onde. Sous les hypothèses précédentes, la n-ième composante du vecteur $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta})$ s'écrit :

$$a(\boldsymbol{\theta})_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cos(\rho)c_n^{(x)}/\lambda} \tag{5}$$

où $c_n^{(x)}$ est la coordonnée du n-ième capteur sur l'axe $(0x)$.

Question 2 *Programmer la grille matricielle $\boldsymbol{G}$ pour ρ parcourant l'intervalle $[0, \pi]$.*

Réponse 2 *La ℓ-ième colonne de la matrice $\boldsymbol{G}$, de taille $(N \times L)$, n'est autre que le vecteur directeur $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta}_\ell)$ associé à la direction d'arrivée $\boldsymbol{\theta}_\ell = [\rho_\ell, 0]^{\mathsf{T}}$ avec ρ_ℓ appartenant à $[0, \pi]$. En pratique, la matrice $\boldsymbol{G}$ est construite à partir d'une grille equiespacée de L valeurs d'angle ρ_ℓ prises dans $[0, \pi]$.*

En télécoms, une manière de transmettre un message radio, consiste à le coder à l'aide d'une suite de 1 et de -1, puis d'émettre cette suite binaire. Un tel signal est plus connu sous le nom de Binary Phase Shift Keying (BPSK) filtrée NRZ de temps symbole égal à la période d'échantillonnage. La fonction *rand* de Matlab permet de tirer au hasard un nombre dans l'intervalle $[0, 1]$ en ayant autant de chance de tomber sur n'importe quel nombre de $[0, 1]$.

Question 3 *Tester et commenter le programme suivant :*

```
y = rand;
if y < 0.75
s = 1;
else
s = -1;
end
```

Réponse 3 *Le programme précédent permet de générer une réalisation d'une variable aléatoire discrète $\mathcal{S}$ non équiprobable prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ avec comme probabilité $P(\mathcal{S} = 1) = 3/4$ et $P(\mathcal{S} = -1) = 1/4$.*

Question 4 *En déduire un programme permettant de générer $K = 1000$ échantillons d'une BPSK filtrée NRZ de temps symbole égal à la période d'échantillonnage, où chaque valeur ± 1 de la BPSK est tirée au hasard dans l'ensemble[1] discret $\{-1, 1\}$ de manière à avoir la même chance de tomber sur -1 ou 1.*

Réponse 4 *Notons s le vecteur ligne représentant une réalisation de la BPSK citée ci-dessus. On a :*

```
K = 1000;
y = rand(1, K);
for k = 1 : K
if y(k) < 0.5
s(k) = 1;
else
s(k) = -1;
end
end
```

Question 5 *Programmer la matrice $\boldsymbol{X}$ d'observations correspondant aux donnée recueillies par notre antenne recevant une BPSK de longueur $K = 1000$ et de direction d'arrivée $\boldsymbol{\theta}_0 = [\pi/2, 0]^\mathsf{T}$.*

Réponse 5 *Notons s le vecteur ligne représentant une réalisation de la BPSK citée ci-dessus. On a :*

```
K = 1000;
RLambda = 0.5;
y = rand(1, K);
for k = 1 : K
if y(k) < 0.5
s(k) = 1;
else
s(k) = -1;
end
end
atheta = exp(i*RLambda*2*pi*cos(pi/2)*[0; 0.5; 1]);
X = atheta * s;
```

[1] Cet ensemble est appelé alphabet dans le jargon des télécoms

Question 6 *Implémenter la méthode demandée à la question 1, et retrouver la direction* $\boldsymbol{\theta}_0 = [\pi/2, 0]^\intercal$ *à partir des matrices* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{G}$.

Question 7 *Nettoyer l'espace mémoire de Matlab en exécutant la commande "clear all". Charger les données stockées dans le fichier "data.mat" en écrivant sous Matlab : "load data". Taper alors "whos" pour vérifier que Matlab possède en mémoire la matrice* $\boldsymbol{X}$. *Construire alors la grille matricielle* $\boldsymbol{G}$ *et identifier la direction d'arrivée* $\boldsymbol{\theta}_0 = [\rho_0, 0]^\intercal$ *correspondant à la matrice* $\boldsymbol{X}$ *d'observations.*