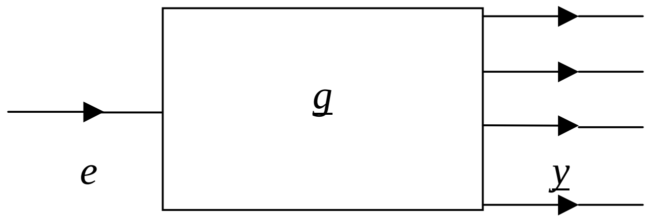
TP de COMMUNICATIONS NUMERIQUES : EGALISATION AVEUGLE, LA METHODE A SOUS-ESPACES



TP DE COMMUNICATIONS NUMERIQUES : EGALISATION AVEUGLE, LA METHODE A SOUS-ESPACES 1

1 INTRODUCTION 2

2 MODÉLISATION DU PROBLÈME 2

3 ALGORITHME 3

4 SIMULATIONS 4

(∗) Eric MOULINES, Pierre DUHAMEL, Jean-François CARDOSO, Sylvie MAYRARGUE, Subspace Methods for the Blind Identification of Multichannel FIR Filters, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 43, NO. 2, Février 1995.

1 Introduction

Les multitrajets propres à certains canaux de transmission numérique tels que le milieu atmosphérique, favorisent l'apparition d'interférence entre symboles. D'ordinaire, et plus précisément en contexte coopératif, certains symboles – composant la dite séquence d'apprentissage – de la modulation numérique transmise sont connus du récepteur et dédiés à l'identification du filtre caractérisant le canal. Il est alors possible de construire un filtre adapté de réception et d'annuler l'IES. Néanmoins, lorsque le filtre du canal varie au cours du temps, même lentement, il est nécessaire d'envoyer périodiquement la séquence d'apprentissage, limitant ainsi la place réservée aux symboles porteurs de la véritable information : on observe une réduction du débit binaire d'information. De ce fait, les méthodes d'égalisation, dites aveugles, voient leur intérêt grandir, car elles n'imposent pour la plupart, aucune connaissance a priori de la modulation numérique émise : la séquence d'apprentissage n'est pas requise. Nous allons lors de ce TP programmer l'une de ces méthodes : la méthode à sous-espaces (∗).

2 Modélisation du problème

Une modulation numérique linéaire $x_M(t)$ est transmise à travers un canal sujet aux multitrajets. A la réception, nous disposons de L capteurs nous permettant d'obtenir L observations du signal transmis, qui est par la suite démodulé puis filtré. Le problème à résoudre est dans un premier temps d'identifier le filtre global propre à la transmission et ce sans information a priori sur la source émise, puis, dans un second temps d'extraire à partir des observations les symboles émis à travers le canal. Les L observations sont stockées dans le vecteur $\underline{y}(t)$ défini de la manière suivante :

(E1) $$\underline{y}(t) = {}_{m}\ c_m\, \underline{g}(t - mT) + \underline{b}(t)$$

où c_k est le $k^{\text{ième}}$ symbole d'information, T la période symbole, $\underline{b}(t)$ le vecteur bruit supposé être un bruit blanc $\mathrm{BB}(0,\sigma^2\mathrm{I})$ indépendant des symboles émis, et $\underline{g}(t) = [g^{(1)}(t),\ g^{(2)}(t),\ \ldots, g^{(L)}(t)]$ le vecteur des réponses impulsionnelles $g^{(i)}(t)$ du filtre global observées sur chacune des L voies.

On échantillonne alors chaque composante $y^{(i)}(t)$ de $\underline{y}(t)$ à différents instants d'échantillonnage $t = n\,T$, n variant de 1 à N :

(E2) $$y^{(i)}(n\,T) = y_n^{(i)} = {}_{m}\ c_m\, g^{(i)}((n - m)T) + b_n^{(i)}$$

En effectuant un changement de variable et en supposant que le filtre global est de longueur finie (FIR), nous obtenons :

(E3) $$y_n^{(i)} = {}_{1 \le m \le M+1}\ c_{n+1-m}\, g^{(i)}((m-1)T) + b_n^{(i)} = {}_{1 \le m \le M+1}\ c_{n+1-m}\, g_m^{(i)} + b_n^{(i)}$$

Exprimons cette modélisation sous forme matricielle :

(E4) $$\underline{y}_n = G\, \underline{c}_n + \underline{b}_n$$

où $\underline{y}_n = [y_n^{(1)}, \ldots, y_{n-N+1}^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_{n-N+1}^{(2)}, \ldots, y_n^{(L)}, \ldots, y_{n-N+1}^{(L)}]^{\mathrm{T}}$ est de taille $(L\,N \times 1)$, $\underline{c}_n = [c_n, \ldots, c_{n-N-M+1}]^{\mathrm{T}}$ de taille $((N + M) \times 1)$, $\underline{b}_n = [b_n^{(1)}, \ldots, b_{n-N+1}^{(1)}, b_n^{(2)}, \ldots, b_{n-N+1}^{(2)}, \ldots, b_n^{(L)}, \ldots, b_{n-N+1}^{(L)}]^{\mathrm{T}}$ de taille $(L\,N \times 1)$ et G de taille $((L\,N) \times (N + M))$ telle que :

(∗) Eric MOULINES, Pierre DUHAMEL, Jean-François CARDOSO, Sylvie MAYRARGUE, Subspace Methods for the Blind Identification of Multichannel FIR Filters, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 43, NO. 2, Février 1995.

(E5) $$G = \begin{pmatrix} g_1^{(1)} & \ldots & g_{M+1}^{(1)} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & g_1^{(1)} & \ldots & g_{M+1}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & g_1^{(1)} & \ldots & g_{M+1}^{(1)} \\ g_1^{(2)} & \ldots & g_{M+1}^{(2)} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & g_1^{(2)} & \ldots & g_{M+1}^{(2)} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & g_1^{(2)} & \ldots & g_{M+1}^{(2)} \\ \ldots & & & & & & \ldots \\ g_1^{(L)} & \ldots & g_{M+1}^{(L)} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & g_1^{(L)} & \ldots & g_{M+1}^{(L)} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & g_1^{(L)} & \ldots & g_{M+1}^{(L)} \end{pmatrix}$$

Le problème posé est celui de déterminer dans un premier temps la matrice G, puis de récupérer dans un second temps le vecteur de symbole $\underline{c}_n$.

3 Algorithme

1) effectuer une SVD (Singular Value Decomposition) de la matrice $R_y = \mathrm{E}[\underline{y}_n\ \underline{y}_n^{\mathrm{H}}]$ ou plus précisément de son estimée $\hat{R}_y$. On pourra prendre comme $\hat{R}_y$, la moyenne empirique de P matrices $\underline{y}_n\ \underline{y}_n^{\mathrm{H}}$ définie par :

(E6) $$\hat{R}_y = P^{-1} \sum_{1\le p\le P} \underline{y}_{n_p} \underline{y}_{n_p}^{\mathrm{H}} = P^{-1}\ Y\ Y^{\mathrm{H}}$$

où les P colonnes de Y sont les P vecteurs $\underline{y}_n$. Disposer de P vecteurs $\underline{y}_n$, implique donc par construction de disposer de P vecteurs $\underline{c}_n$ où rappelons-le, $\underline{c}_{n+1}$ possède les $N+M-1$ derniers symboles de $\underline{c}_n$ ainsi qu'un nouveau symbole en fin de vecteur : il nous faut donc disposer de $K = P + M + N - 1$ symboles c_k.

$$\underbrace{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{M+N}}_{\underline{c}_1}, c_{M+N+1}, c_{M+N+2}, \ldots, c_K$$

$\underline{c}_2$

$\underline{c}_3$

....

$\underline{c}_P$

Quant à la SVD, utiliser la fonction de MATLAB du même nom, taper « help svd » sous MATLAB pour savoir ce qu'elle prend et renvoie comme valeurs. Notons qu'effectuer la SVD d'une matrice hermitienne revient à diagonaliser cette dernière en cherchant comme matrice de passage une matrice orthonormée.

2) Récupérer les $M + N$ plus grandes valeurs propres λ_i – appelées valeurs propres signal – ainsi que les vecteurs propres associés $\underline{s}_i$. Les autres valeurs propres, au nombre de $LN - M - N$, sont appelées valeurs propres bruit auxquelles on associe les vecteurs propres $\underline{v}_i$. L'ensemble des vecteurs $\underline{s}_i$ constitue l'espace signal et est orthogonal à l'ensemble des vecteurs $\underline{v}_i$, nommé espace bruit. Or les vecteurs colonnes de la matrice G appartiennent à l'espace signal, ils sont donc eux aussi orthogonaux à l'espace bruit, nous fournissant ainsi un moyen d'identifier G.

(E7) $\underline{v}_i^{\mathrm{H}}\ G = 0$ pour tout $1 \le i \le L\ N - M - N + 1$

3) De manière pratique, nous choisissons de minimiser le critère des moindres aux carrés suivant :

(∗) Eric MOULINES, Pierre DUHAMEL, Jean-François CARDOSO, Sylvie MAYRARGUE, Subspace Methods for the Blind Identification of Multichannel FIR Filters, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 43, NO. 2, Février 1995.

(E8) $\quad q(G) = {}_{1\leq i\leq LN-M-N}\ |\underline{v}_i^{\mathrm{H}}\, G\,|^2$

Ce critère peut se réécrire de la manière suivante :

(E9) $\quad q(\underline{g}) = \underline{g}^{\mathrm{H}}\, Q\, \underline{g} \qquad\qquad$ avec $Q = {}_{1\leq i\leq LN-M-N}\, V_i\, V_i^{\mathrm{H}}$

où $\underline{g} = (g_1^{(1)}, \ldots, g_{M+1}^{(1)}, \ldots, g_1^{(L)}, \ldots, g_{M+1}^{(L)})^{\mathrm{T}}$ est de taille $L(M+1)\times 1$ et les matrices V_i, de taille $L(M+1)\times(M+N)$, se construisent à partir des vecteurs $\underline{v}_i$ de la manière suivante :

(E10)
$$V_i = \begin{pmatrix}
v_i(1) & \ldots & v_i(N) & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & v_i(1) & \ldots & v_i(N) & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & & & & & & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & v_i(1) & \ldots & v_i(N) \\
v_i(N+1) & \ldots & v_i(2N) & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & v_i(N+1) & \ldots & v_i(2N) & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & & & & & & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & v_i(N+1) & \ldots & v_i(2N) \\
\ldots & & & & & & \ldots \\
v_i((L-1)N+1) & \ldots & v_i(LN) & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & v_i((L-1)N+1) & \ldots & v_i(LN) & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & & & & & & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & v_i((L-1)N+1) & \ldots & v_i(LN)
\end{pmatrix}$$

où $v_i(j)$ est la $j^{\text{ème}}$ composante de $\underline{v}_i$. Une solution normée au problème de minimisation **(E9)** est de prendre pour $\underline{g}$ le vecteur propre orthonormé associé à la plus petite valeur propre de Q. On pourra à nouveau utiliser la fonction « svd » de MATLAB.

4) A ce stade de l'algorithme nous disposons d'une estimation $\hat{G}$ de la matrice G. Il nous est alors possible de construire l'égaliseur $\hat{G}^{\#} = (\hat{G}^{\mathrm{H}}\,\hat{G})^{-1}\hat{G}^{\mathrm{H}}$. Ainsi nous estimons nos P vecteurs symboles $\underline{c}_n$ définis par :

(E11) $\quad \hat{\underline{c}}_{n_p} = \hat{G}^{\#}\ \underline{y}_{n_p} \qquad$ pour $1 \leq p \leq P$

En se rappelant de quelle manière nous avons construit les P vecteurs $\underline{c}_n$, nous en déduisons une estimée des K symboles c_k.

5) Il est alors possible d'associer à la suite de valeurs $(c_k)_1^K$ une estimation de la probabilité d'erreur symboles, notée TES et nommée taux d'erreur symbole. Ce taux se définit comme le nombre de symboles mal estimés divisés par K.

4 Simulations

1) simuler une suite de K symboles binaires appartenant à l'alphabet $\{-1, +1\}$ suivant une loi uniforme, tels que ceux caractérisant une BPSK, construire les P vecteurs observations $\underline{y}_n$ en prenant comme valeurs : $N = 10$, $L = 4$, $M = 4$, $g^{(1)} = [-0.049, 0.482, -0.556, 1.0, -0.171]$, $g^{(2)} = [0.443, 1.0, 0.921, 0.189, -0.087]$, $g^{(3)} = [-0.211, -0.199, 1.0, -0.284, 0.136]$, $g^{(4)} = [0.417, 1.0, 0.873, 0.285, -0.049]$, SNR = 25dB, $\sigma^2 = 1$, $T = 4$.

2) Utiliser la méthode à sous-espace pour identifier le filtre global et extraire les symboles émis à partir de K = 250, 500, 1000, 2000, 5000 symboles. Après extraction d'un symbole, il faut décider s'il est sensé estimer le symbole -1 ou bien le symbole $+1$, on utilisera pour ce faire la valeur du seuil de décision optimal α_{opt} donnée dans le cours de communications numériques et minimisant la probabilité d'erreur symbole en présence de bruit gaussien centré et de symboles binaires équirépartis.

3) Calculer le taux d'erreur symbole (TES) pour chacune des « K » valeurs de symboles. Représenter le TES graphiquement en fonction de K. Que remarquez-vous ?

(∗) Eric MOULINES, Pierre DUHAMEL, Jean-François CARDOSO, Sylvie MAYRARGUE, Subspace Methods for the Blind Identification of Multichannel FIR Filters, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 43, NO. 2, Février 1995.