

TP d'introduction au filtrage numérique

La partie I qui concerne les généralités sur les filtres discrets est distribuée séparément.

II Principes de synthèse

2.1 Synthèse de filtres MA (RIF)

2.1.1 Synthèse de filtres MA par coefficients de Fourier

Considérons un gabarit $G(f) = 1$ si $f \in [-B, B]$, ($= 0$ sinon) sur $[-1/2, 1/2[$ correspondant à un filtre passe-bas idéal de largeur de bande normalisée égale à $2B$. Sa réponse impulsionnelle est :

$$\begin{aligned} g[n] &= \int_{-1/2}^{1/2} \hat{G}(f) e^{2\pi i n f} df \\ &= \int_{-B}^B e^{2\pi i n f} df = \frac{\sin(2\pi n B)}{\pi n}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ce filtre ne convient évidemment pas puisqu'il n'est pas à support fini et qu'il n'est pas causal. Une idée naturelle est alors de ne retenir pour H qu'une sous-suite de g . Pour obtenir un filtre dont le module de la réponse en fréquence reste proche du gabarit et pour lequel la distorsion de phase est évitée (ce qui revient à dire que la relation entre la fréquence et la phase doit être la plus linéaire possible) il suffit que cette suite soit paire ou impaire autour d'un instant de référence n_0 : $H[n_0 + n] = \pm H[n_0 - n]$, $n \in \{n_0 - (N-1)/2, n_0 + (N-1)/2\}$, où N est l'ordre du filtre supposé ici impair (une phase linéaire peut également être obtenue pour un nombre pair de coefficients, la symétrie devant alors être réalisée par rapport à une valeur non entière de l'argument de la forme $n_0 + 1/2$).

Pour que le filtre soit causal, tout en minimisant le retard introduit, n_0 doit être pris égal à $N-1$. Dans cet esprit on peut choisir comme réponse impulsionnelle causale :

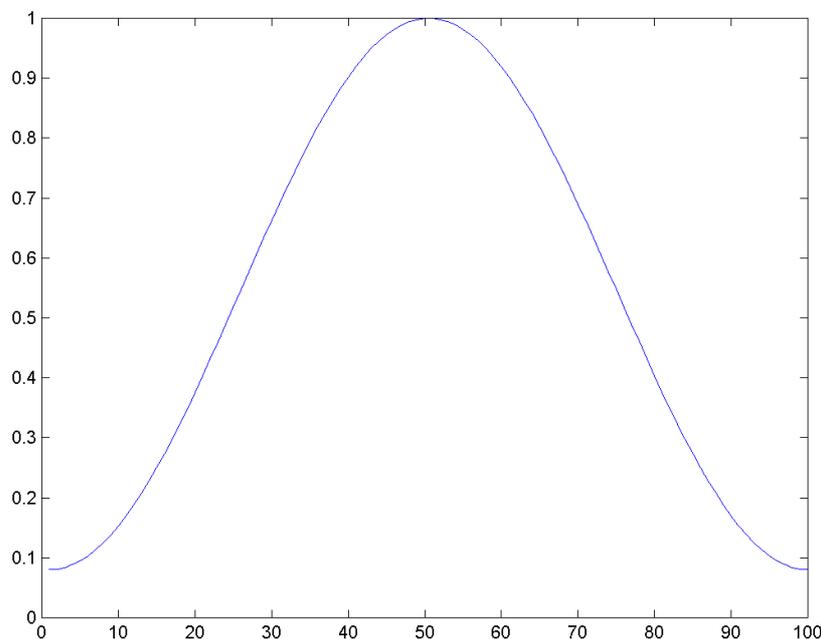
$$H[n] = g[n - (N-1)/2], n = 0, \dots, N-1$$

La relation suivante traduit alors l'effet de distorsion, sur la réponse en fréquence du filtre, par rapport au gabarit désiré:

$$\hat{H}(f) = \exp(-2\pi i f (N-1)/2) \cdot \text{CONVP}(\hat{P}_N, G)(f) \quad f \in [-1/2, 1/2[$$

où $P_N[n] = 1_{\{-(N-1)/2, \dots, (N-1)/2\}}[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ est la fonction porte en temps discret (centrée sur l'origine) et où l'exponentielle complexe correspond à un déphasage linéaire en fonction de la

TP d'introduction au filtrage numérique
 fréquence correspondant a un retard pur de $(N - 1)/2$ unités du temps discret. Dans la convolution de G avec \hat{P}_N apparaissent des sur-oscillations à hauteur des discontinuités de G , en $f = \pm B$: c'est ce qu'on appelle le phénomène de Gibbs. Ces sur-oscillations étant dues à la forme elle-même oscillante (en sinus cardinal) de la transformée de Fourier de P_N la parade classique est de remplacer P_N par une fenêtre de pondération $POND$, également paire pour conserver la linéarité de la phase, mais sans discontinuité sur les bords. Une fenêtre classique est la fenêtre de Hamming qui a l'allure suivante :



La réponse en fréquence du filtre devient alors

$$\hat{H}(f) = \exp(-2\pi if(N-1)/2) \cdot \text{CONVP}(\text{TFS}(POND), G)(f) \quad f \in [-1/2, 1/2[$$

ce qui se traduit par une nette atténuation des sur-oscillations au prix d'une coupure en fréquence moins nette en $\pm B$.

2.1.2 Synthèse de filtres MA par échantillonnage en fréquence

Cette méthode consiste à construire une réponse impulsionnelle de longueur N fixée à laquelle on impose les N contraintes sur la réponse en fréquence :

TP d'introduction au filtrage numérique

$$\hat{H}(f_n) = \sum_{k=-(N-1)/2}^{+(N-1)/2} \exp(-2\pi i k f_n) H[k] = G(f_n), f_n = \frac{n}{N}, n = -(N-1)/2, \dots, (N-1)/2$$

Il s'avère que la solution existe et qu'elle est unique. En effet il suffit de suivre la procédure suivante :

- a) Construire la suite des échantillons dans le domaine des fréquences sur l'intervalle $[0,1[$ (au lieu de sur $[-1/2,1/2[$:

$$\hat{H}_D[n] = \hat{G}(f_n), f_n = \frac{n}{N}, n = 0, \dots, N-1$$

- b) Calculer $H_D[k] = FFT^{-1}(\hat{H}_D)[n]$, $n = 0, \dots, N-1$ qui peut s'interpréter comme un opérateur H_D de convolution périodique sur une période N .
- c) Le filtre H synthétisé est alors déduit de H_D en rendant causal la suite des échantillons du motif central de la suite périodique H_D .

L'inconvénient de la méthode est évidemment que l'on ne contrôle pas explicitement la réponse en fréquence $\hat{H}(f_n)$ pour des valeurs de f placées entre les f_n . Si on l'applique ainsi sur un gabarit passe-bas rectangulaire on constate la présence d'oscillations dans $\hat{H}(f)$. La méthode proposée en pratique est souvent de remplacer le gabarit rectangulaire par un gabarit trapézoïdal introduisant des transitions plus progressives à hauteur des fréquences de coupure désirées.

2.2 Synthèse de filtres ARMA

La structure générale de ces filtres impose à la fonction de transfert d'être de forme rationnelle (en plus d'être stable et causale). Leur synthèse est mathématiquement équivalente, à une constante multiplicative près, à la détermination des pôles et des zéros de cette fonction de transfert. Deux méthodes sont présentées ici. La première, bien qu'heuristique, présente l'avantage d'être très intuitive et de bien faire sentir l'influence des pôles et des zéros sur l'allure de la réponse en fréquence.

2.2.1 Approche heuristique (à caractère géométrique) par placement des pôles et des zéros

Dans cette méthode on impose des pôles en fonctions d'une ou plusieurs bandes passantes que l'on désire imposer dans la réponse en fréquence du filtre et éventuellement des zéros pour obtenir une bonne atténuation dans les bandes de coupure.

Pour l'expliquer considérons l'exemple de fonction de transfert en z

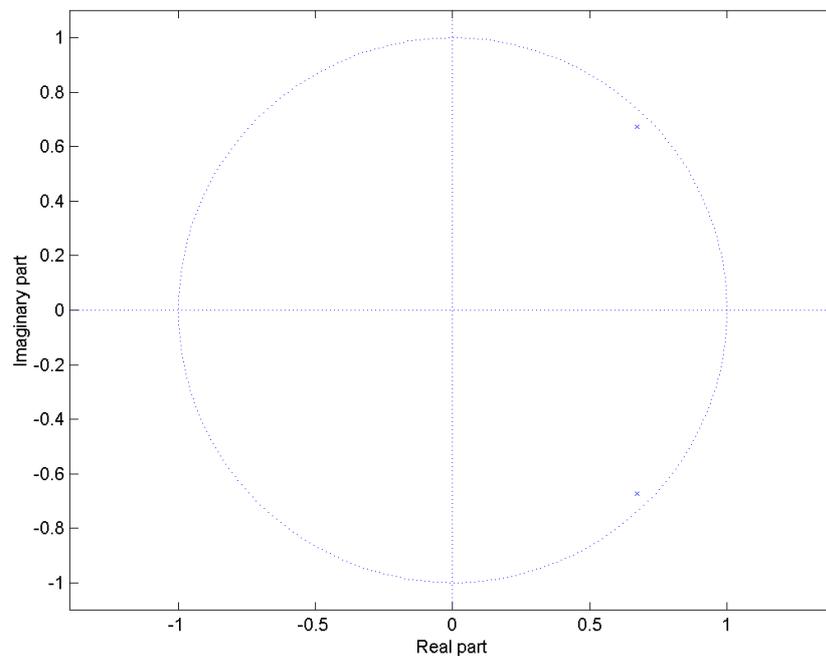
TP d'introduction au filtrage numérique

$$\frac{Z_S(z)}{Z_E(z)} = Z_H(z) = \frac{1}{(z-p)(z-p^*)} = \frac{1}{z^2 - z(p^*+p) + pp^*}$$

où $p = \rho e^{i\theta}$; $\theta = 2\pi f$;

$$= \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}(p^*+p) + pp^* z^{-2}}$$

La figure ci-dessous montre la position dans le plan complexe des 2 pôles (on a pris ici $\rho=0.95, \theta=\pi/4$) qui sont évidemment choisis de module inférieur à 1 :



Pour la fréquence $f = \frac{\theta}{2\pi}$ le point représentatif de $\exp(2\pi if)$ est à distance minimale (égale à $1 - \rho$) du pôle situé dans le demi-plan supérieur. Pour la fréquence négative de même valeur absolue le pôle du demi-plan inférieur qui est proche du point représentatif. Il est alors clair géométriquement que le module de la réponse en fréquence :

$$\left| Z_H(e^{2\pi if}) \right| = \left| \frac{1}{(e^{2\pi if} - p)(e^{2\pi if} - p^*)} \right|, f \in [-1/2, 1/2[$$

passé par un maximum approximativement égal à $\frac{1}{(1-\rho)2\rho \sin(\theta)}$ ($2\rho \sin(\theta)$ étant

approximativement la distance $|e^{2\pi if\theta} - \rho e^{-2\pi if\theta}|$) pour ces 2 valeurs de fréquence et qu'il passera par une valeur minimale pour $f = \pm 1/2$ qui amène le point représentatif en $-i$ dans le plan complexe.

L'équation récurrente de filtrage obtenue à partir de la transformée en Z est alors la suivante :

$$\text{TP d'introduction au filtrage numérique}$$

$$S[n] = (p^* + p)S[n-1] - pp^*S[n-2] + E[n-2]$$

2.2.2 Utilisation de la transformée bilinéaire

Cette méthode passe par l'introduction d'une fonction de transfert analogique que l'on synthétise par choix de pôles et de zéros dans le plan complexe pour approcher un gabarit fréquentiel G_A (G analogique) sur R déduit d'un gabarit fréquentiel G_N (G numérique) sur $[-1/2, 1/2[$. La correspondance entre les deux gabarits se fait au moyen des transformations suivantes, l'une étant réciproque de l'autre :

$$TR^{-1} : p \rightarrow z = \frac{p+1}{1-p} \quad TR : z \rightarrow p = \frac{z-1}{z+1}$$

TR transforme le cercle unité (moins le point $-i$) $z = e^{2\pi i f_N}$, $f_N \in [-1/2, 1/2[$
en la droite verticale $p = 2\pi i f_A$, $f_A \in R$.

La correspondance entre les fréquences 'numériques' sur le $[-1/2, 1/2[$ et les fréquences analogiques sur R se fait par la formule :

$$\omega_A = \tan\left(\frac{\omega_N}{2}\right) \quad \omega_A = 2\pi f_A, \quad \omega_N = 2\pi f_N$$

Supposons que l'on désire réaliser un filtre numérique passe-bande autour de la fréquence numérique $f_{0N} = 0.25$ correspondant à la pulsation $\omega_{0,N} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\pi}$ à partir d'une fonction de transfert analogique du type passe-bande d'ordre 2 :

$$H(p) = \frac{p}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_{0,A}} p + \frac{p^2}{\omega_{0,A}^2}}$$

La pulsation analogique est égale à $\omega_{0A} = \tan\left(\frac{\omega_{0,N}}{2}\right) = \tan\left(\frac{1}{16\pi}\right)$.

Le choix du coefficient d'amortissement ξ dans la fonction de transfert analogique est plus délicat. Il peut être déterminé par exemple en se donnant une bande passante numérique à -3 dB autour de $f_{0N} = 0.25$, et en utilisant une approximation linéaire locale de la loi de transformation des fréquences pour calculer une largeur de bande analogique qui, divisée par la fréquence de résonance analogique, permettra d'évaluer le coefficient d'amortissement au moyen de la formule d'approximation classique. Supposant que par une telle méthode nous ayons obtenu $\xi = 0.2$. Une fois la pulsation de résonance et l'amortissement analogique fixés, il faut établir la fonction de

TP d'introduction au filtrage numérique
transfert en z du filtre analogique (qui se trouve être paramétrée par ces 2 quantités) au moyen de la substitution $p \rightarrow z$. On trouve ici :

$$Z_H(z) = \frac{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{1 + 2 \frac{\xi}{w_{0,A}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} \frac{1}{w_{0,A}^2}}$$

$$= \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1+z^{-1})^2 + \alpha(1-z^{-1})(1+z^{-1}) + \beta(1-z^{-1})^2}$$

$$Z_H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{z^{-2}(1 - \alpha + \beta) + 2z^{-1}(1 - \beta) + 1 + \alpha + \beta}, \alpha = \frac{2\xi}{w_{0,A}}, \beta = \frac{1}{w_{0,A}^2}$$

On en déduit l'équation récurrente permettant de réaliser l'algorithme de filtrage temporel :

$$(1 + \alpha + \beta)S[n] = -(1 - \alpha + \beta)S[n-2] - 2(1 - \beta)S[n-1] + E[n] - 2E[n-1] + E[n-2]$$

TP d'introduction au filtrage numérique

III Travail à effectuer**Sur la partie 2.1.1**

a) Ecrire 3 fonctions, `passé_bas.m`, `passé_haut.m`, `passé_bande.m` générant respectivement des vecteurs correspondant au trois types classiques de filtres. Le tableau suivant donne les réponses impulsionnelles idéales $g[n], n \in Z$ en mettant en évidence les valeurs à l'origine qui doivent être imposées dans les programmes pour éviter des divisions par 0.

Type de filtre	Réponse impulsionnelle $H(n)$	
Passe bas	$\frac{\sin(2\pi nB)}{\pi n}, n \neq 0$	$2B, n = 0$
Passe haut	$-\frac{\sin(2\pi nB)}{\pi n}, n \neq 0$	$1-2B, n = 0$
Passe bande	$\frac{\sin(2\pi nB_2) - \sin(2\pi nB_1)}{\pi n}, n \neq 0$	$2(B_2 - B_1), n = 0$

On prendra soin de construire des filtres à phase linéaire (et minimale : pas de retard superflu !). On prévoira un paramètre HAM dans la procédure qui, pour une valeur égale à 1, mènera à une pondération par une fenêtre de hamming. Le nombre de coefficients (ce qu'on appelle longueur du filtre pour un filtre AR) sera choisi impair et sera appelé N.

b) Visualiser les réponses en fréquence pour observer les sur-oscillations de Gibbs et discuter les effets de la pondération. Essayer pour des filtres de longueur 15, 31 et 61. Les figures ci dessous montre le genre de résultat à obtenir :

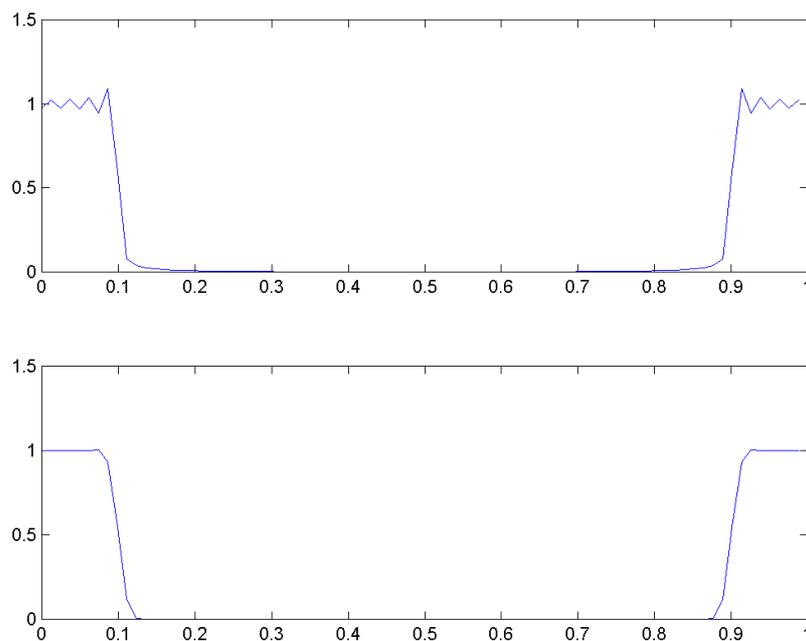


Fig : Réponse en fréquence d'un filtre passe bas sans pondération et avec pondération de Hamming

TP d'introduction au filtrage numérique

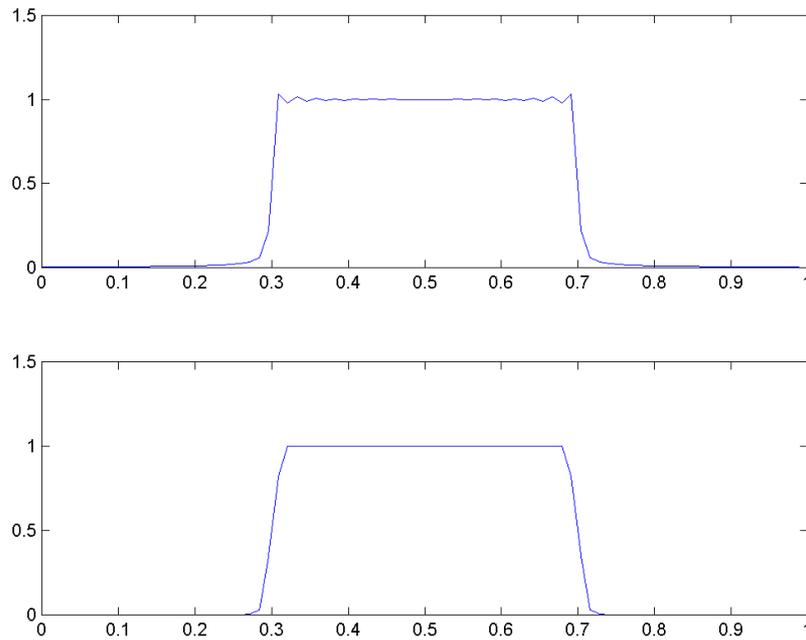


Fig : Réponse en fréquence d'un filtre passe haut sans pondération et avec pondération de Hamming

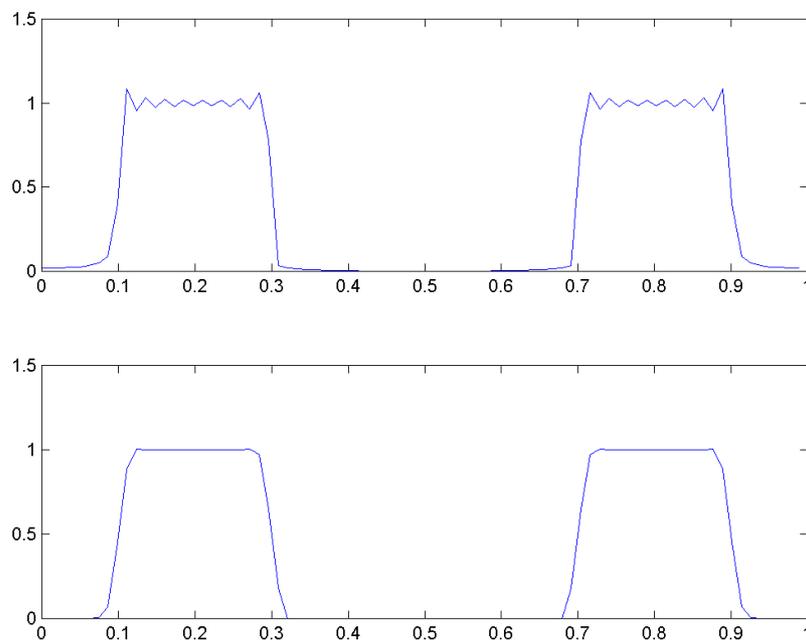


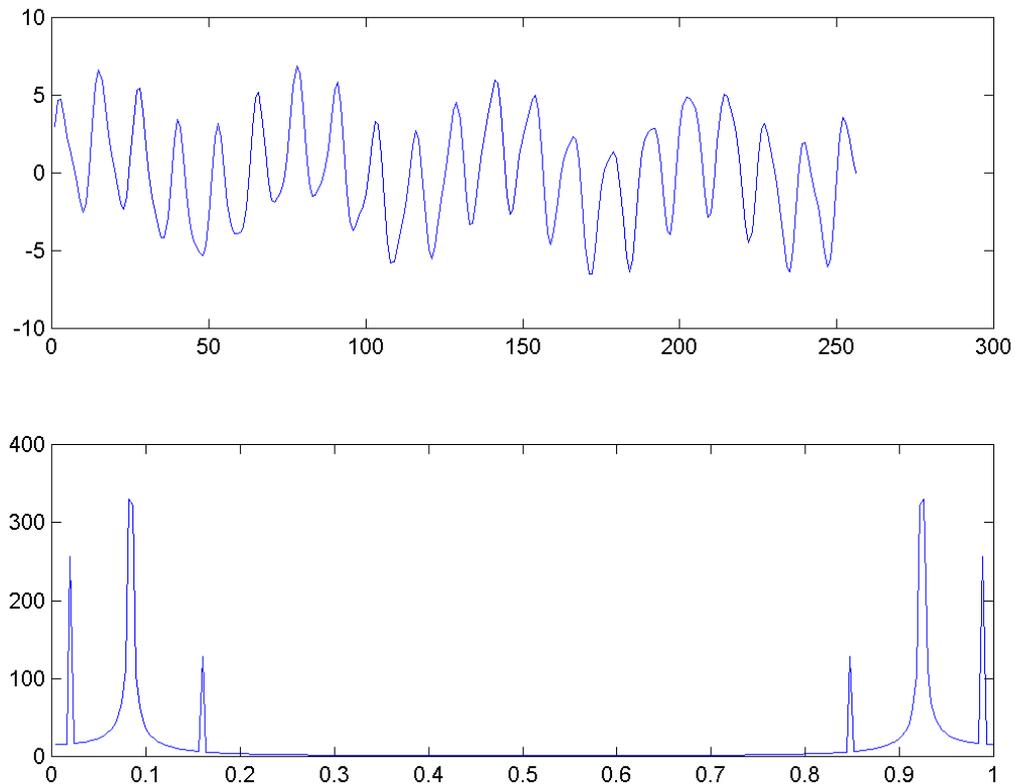
Fig : Réponse en fréquence d'un filtre passe bande sans pondération et avec pondération de Hamming

TP d'introduction au filtrage numérique

c) Appliquer les trois types de filtres au signal X suivant (a l'aide de la fonction conv de matlab). Discuter les formes du signal de sortie généré comme suit :

```
Nech=256;  
X1=2*sin(2*pi*4*[1/Nech:1/Nech:1]);  
X2=4*sin(2*pi*20.5*[1/Nech:1/Nech:1]);  
X3=sin(2*pi*40*[1/Nech:1/Nech:1]);  
X=X1+X2+X3;
```

et dont les représentations en temps et en fréquence sont les suivantes:



Des résultats de filtrage passe-bas, passe-bande et passe-haut sont montrés ci-dessous :

TP d'introduction au filtrage numérique

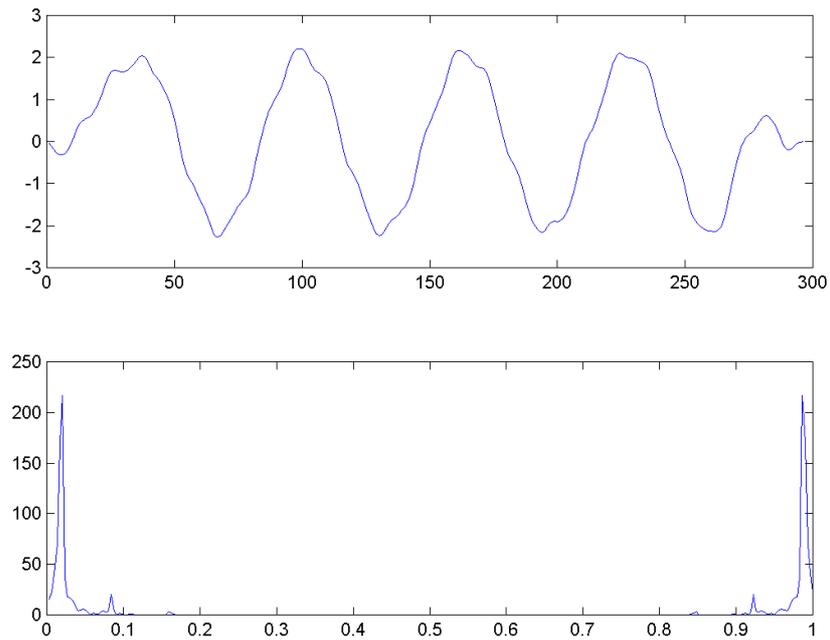


Fig : Réponse en temps et en fréquence d'un filtrage passe bas sur X

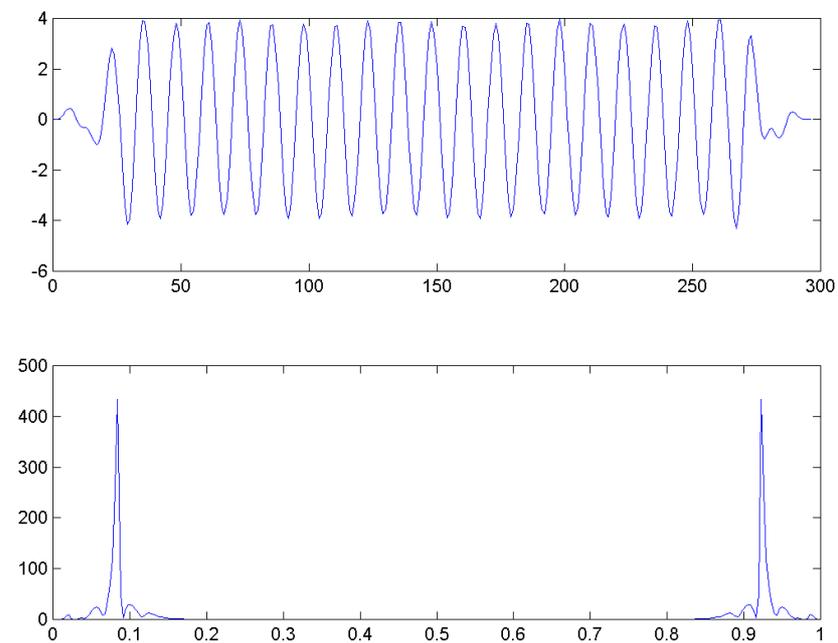


Fig : Réponse en temps et en fréquence d'un filtrage passe bande sur X

TP d'introduction au filtrage numérique

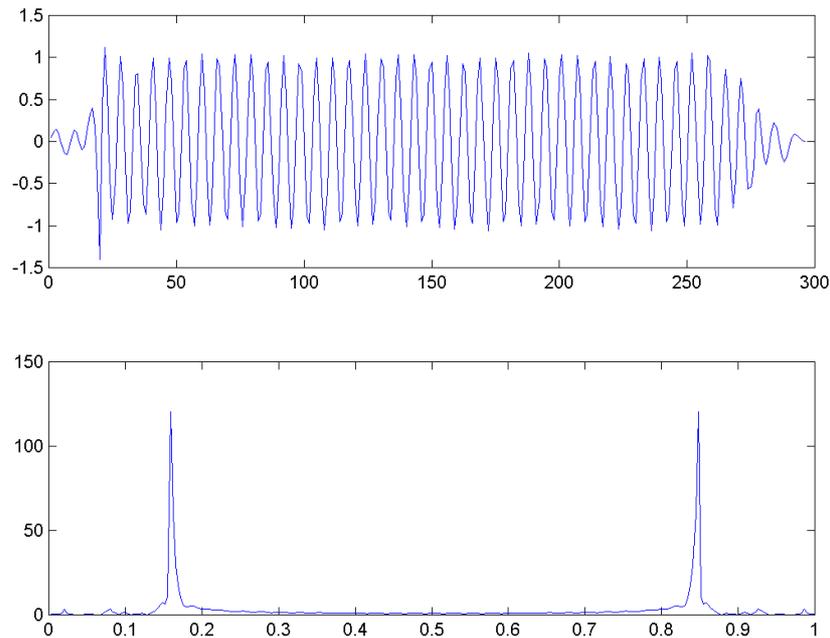


Fig : Réponse en temps et en fréquence d'un filtrage passe haut sur X

Sur la partie 2.1.2 (synthèse de Filtres RIF par échantillonnage en fréquence)

Générer les Gabarits échantillonnés en fréquence suivants :

Filtre Passe Bas : `FirPBasEch = [ones(1, 5), zeros(1, 10), ones(1, 4)] ;`

Filtre Passe Haut : `FirPHautEch = [zeros(1, 5), ones(1, 10), zeros(1, 4)] ;`

Filtre Passe Bande :

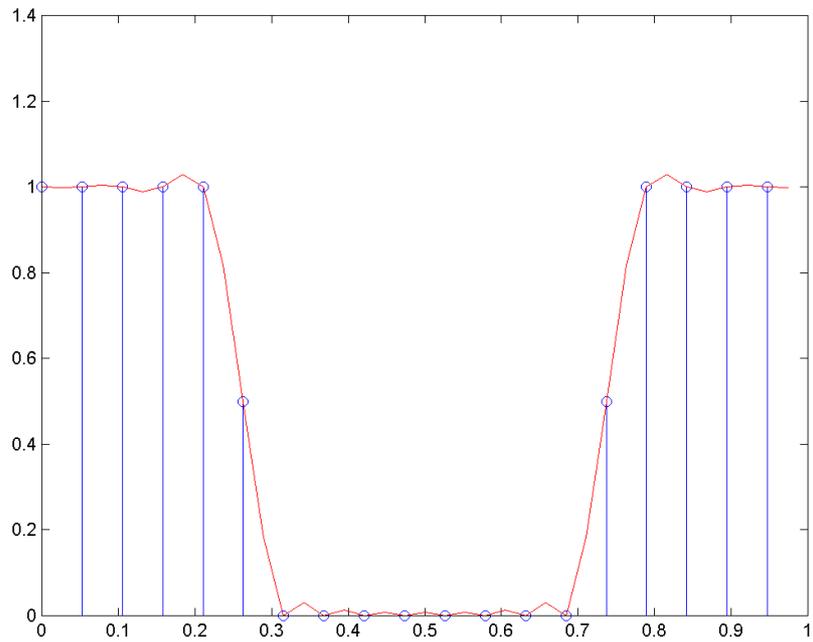
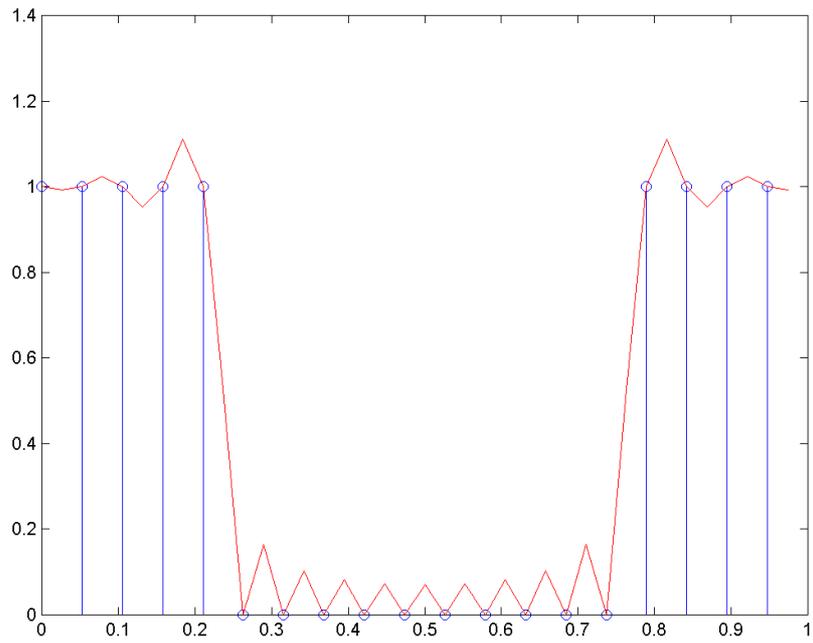
`FirPBandeEch = [zeros(1, 5), ones(1, 3), zeros(1, 4), ones(1, 3), zeros(1, 4)] ;`

Pour chacun des filtres :

- Calculer la réponse temporelle
- Rendre celle-ci causale.
- Calculer la réponse en fréquence en calculant la FFT de la réponse impulsionnelle sur un nombre de points permettant de bien visualiser cette réponse en dehors des fréquences pour lesquelles elle a été imposée (sur-échantillonnage en fréquence) .

Observer les phénomènes de sur oscillation et aménager la procédure de synthèse pour atténuer ce phénomène. La forme des résultats à obtenir est illustrée ci dessous :

TP d'introduction au filtrage numérique



TP d'introduction au filtrage numérique

Sur la partie 2.2.1 (synthèse heuristique de filtres AR)

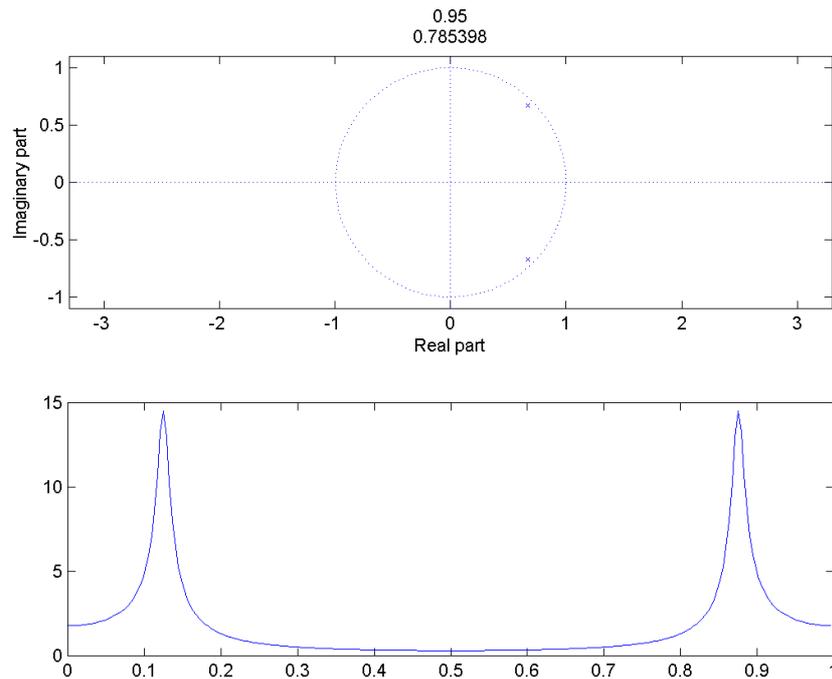
Pour faire les différentes simulations de filtrage on utilisera la fonction filter de matlab.

On fera ainsi des essais comparatifs pour les 2 exemples suivants :

- Exemple 1 : filtre ARMA comportant 2 pôles comme décrit en 2.2.1

$$Z_H(z) = \frac{1}{(z-p)(z-p^*)}, \quad p = \rho \exp(i\theta), \quad \theta = 2\pi f$$

Pour $p = 0.95 \exp(i2\pi \frac{1}{8})$ on obtient :

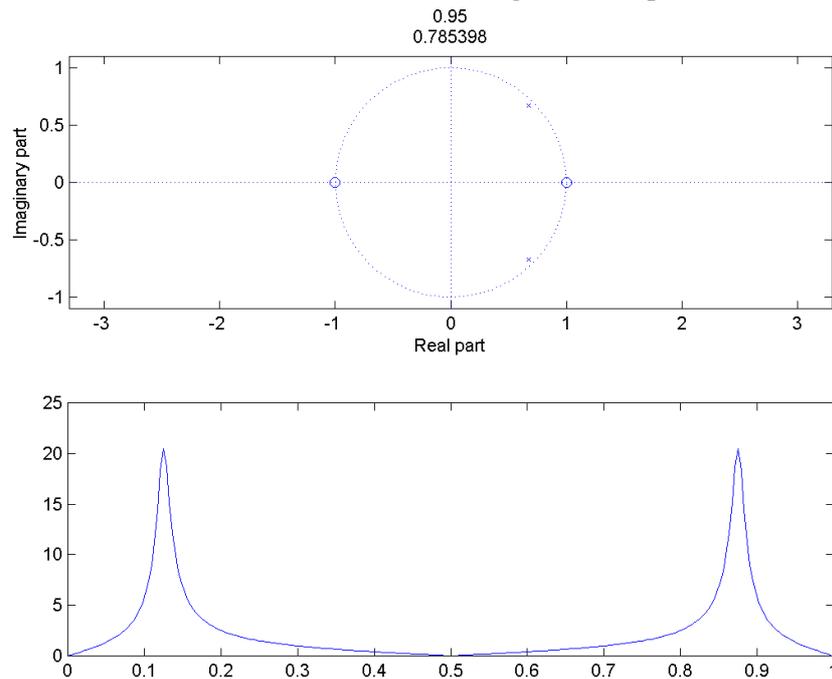


- Exemple 2 : filtre ARMA comportant , en plus des 2 pôles comme ci-dessus, un zéro en $z = 1$ et un zéro en $z = -1$.

$$Z_H(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p)(z-p^*)}, \quad p = \rho \exp(i\theta), \quad \theta = 2\pi f$$

Pour $p = 0.95 \exp(i2\pi \frac{1}{8})$, $z_1 = 1, z_2 = -1$ on obtient :

TP d'introduction au filtrage numérique



On visualisera les réponses en fréquence de ces filtres et on les appliquera ensuite à :

- Un signal rectangulaire (réponse indicielle),
- Un mélange de sinusoides comme déjà utilisé dans ce TP mais en prenant l'une des fréquences égale à la fréquence de résonance du filtre.

On construira dans le même esprit un filtre passe-bande à bande plus large en introduisant 2 (ou 3) paires de pôles conjugués placés à des fréquences voisines. On introduira également des zéros pour obtenir des atténuations plus franches. Dans un premier temps on développera, à partir des pôles et des zéros ainsi choisis, les polynômes en z^{-1} permettant de coder l'algorithme. Dans un deuxième temps on trouvera (après avoir réfléchi!) une manière d'utiliser filter, très simple, pour implémenter le filtrage sans avoir à développer les polynômes.

Sur la partie 2.2.2 (utilisation d'une synthèse dans le domaine du temps continu)

On implémentera l'exemple détaillé dans 2.2.2 pour les valeurs de paramètres proposées puis pour (par exemple) $\xi = 0.7$ et $\omega_{0,N} = 0.125$. Après visualisation de leurs réponses impulsionnelles et fréquentielles les 2 filtres seront ensuite testés avec une entrée de forme rectangulaire. Enfin on reprendra la synthèse pour construire un filtre passe bas à la place d'un filtre passe-bande en se contraignant toujours à utiliser une fonction de transfert d'ordre 2 (ordre du dénominateur) dans le domaine analogique.

TP d'introduction au filtrage numérique

III Travail à effectuer

Sur la partie 2.1.1

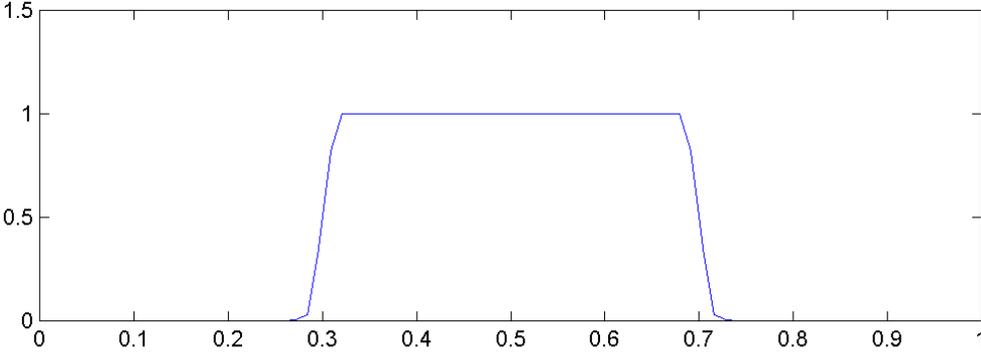
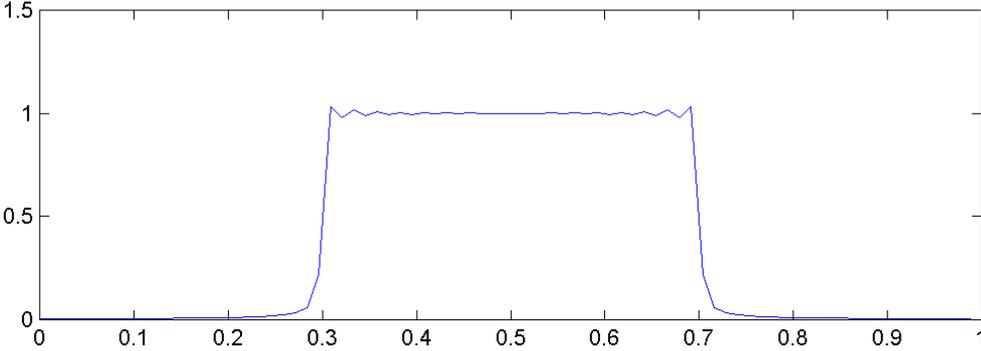
a) Ecrire 3 fonctions, passe_bas.m, passe_haut.m, passe_bande.m générant respectivement des vecteurs correspondant au trois types classiques de filtres. Le tableau suivant donne les réponses impulsionnelles idéales $g[n], n \in Z$ en mettant en évidence les valeurs à l'origine qui doivent être imposées dans les programmes pour éviter des divisions par 0.

Type de filtre	Réponse impulsionnelle H(n)	
Passe bas	$\frac{\sin(2\pi nB)}{\pi n}, n \neq 0$	$2B, n = 0$
Passe haut	$-\frac{\sin(2\pi nB)}{\pi n}, n \neq 0$	$1-2B, n = 0$
Passe bande	$\frac{\sin(2\pi nB_2)}{\pi n} - \frac{\sin(2\pi nB_1)}{\pi n}, n \neq 0$	$2(B_2-B_1), n = 0$

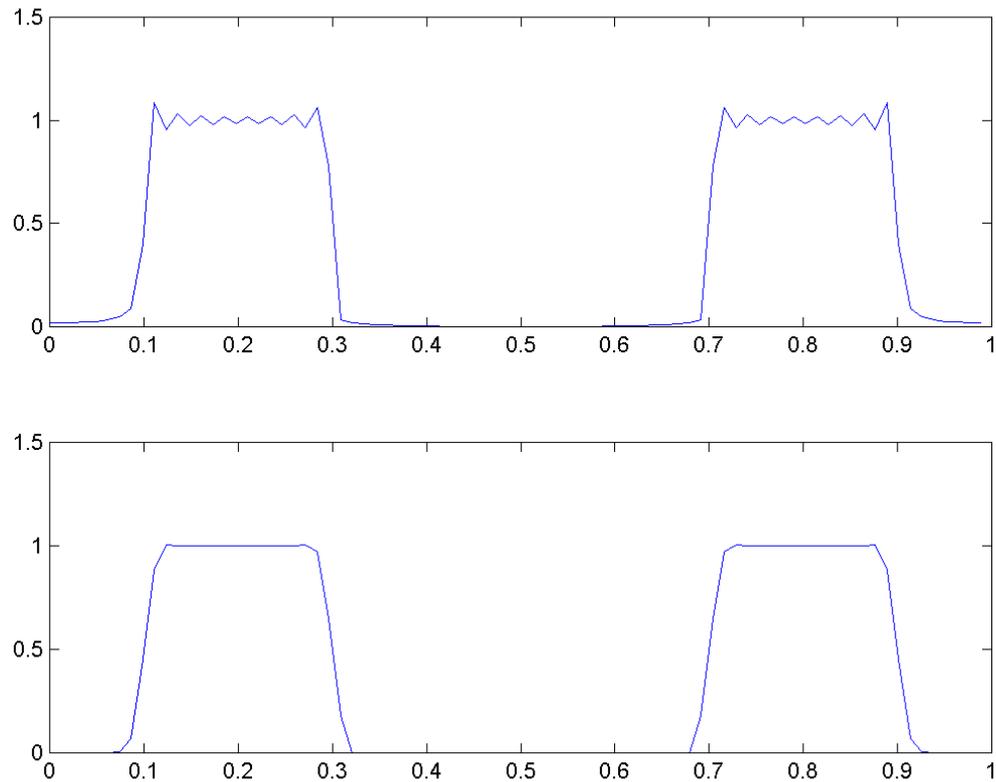
On prendra soin de construire des filtres à phase linéaire (et minimale : pas de retard superflu !). On prévoira un paramètre HAM dans la procédure qui, pour une valeur égale à 1, mènera à une pondération par une fenêtre de hamming. Le nombre de coefficients (ce qu'on appelle longueur du filtre pour un filtre AR) sera choisi impair et sera appelé N.

b) Visualiser les réponses en fréquence pour observer les sur-oscillations de Gibbs et discuter les effets de la pondération. Essayer pour des filtres de longueur 15, 31 et 61. Les figures ci dessous montre le genre de résultat à obtenir :

TP d'introduction au filtrage numérique



TP d'introduction au filtrage numérique

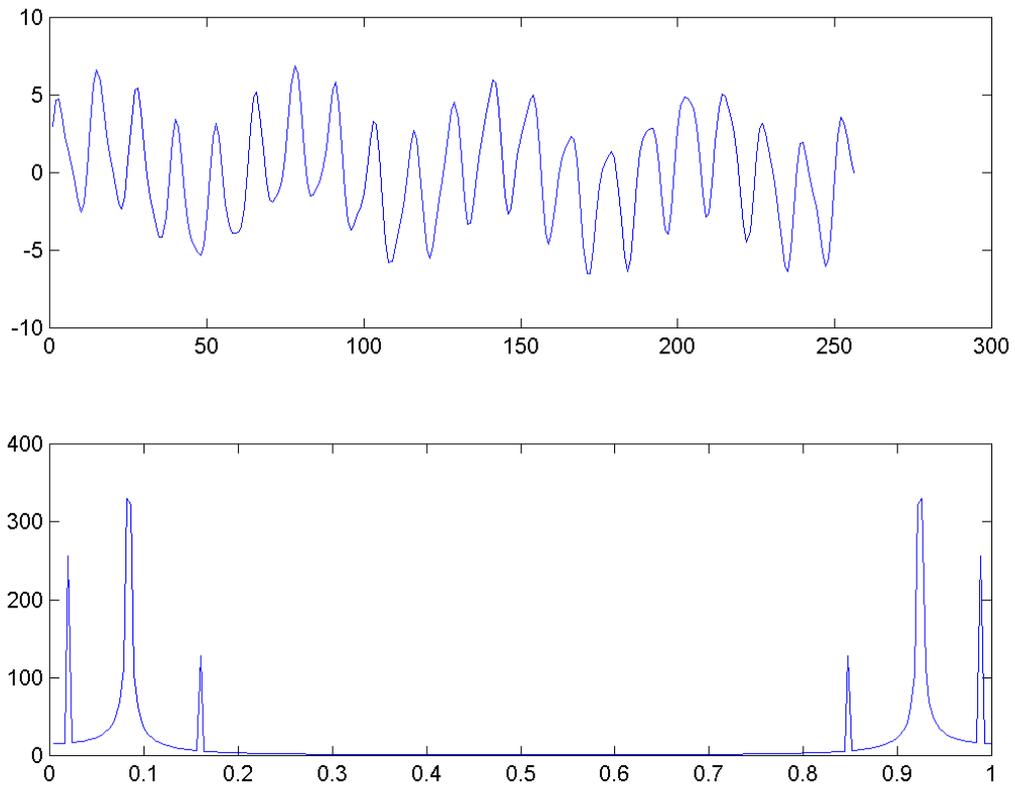


c) Appliquer les trois types de filtres au signal X suivant (a l'aide de la fonction conv de matlab). Discuter les formes du signal de sortie généré comme suit :

```
Nech=256;  
X1=2*sin(2*pi*4*[1/Nech:1/Nech:1]);  
X2=4*sin(2*pi*20.5*[1/Nech:1/Nech:1]);  
X3=sin(2*pi*40*[1/Nech:1/Nech:1]);  
X=X1+X2+X3;
```

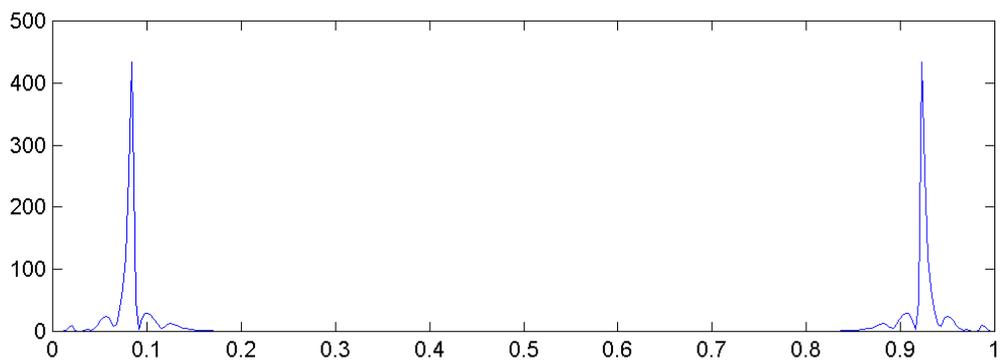
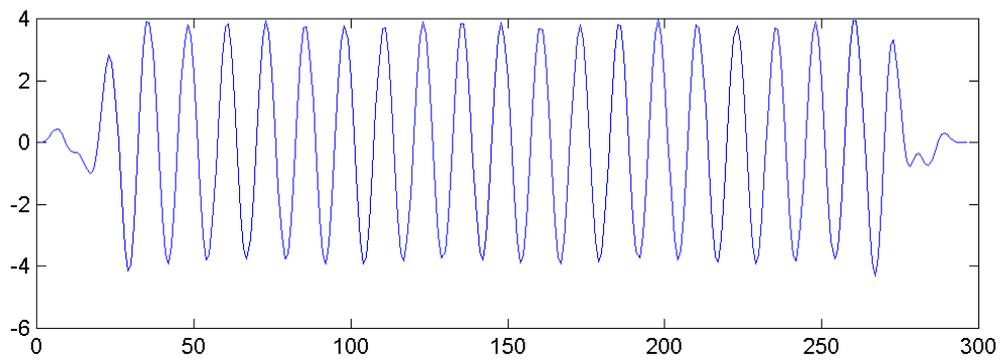
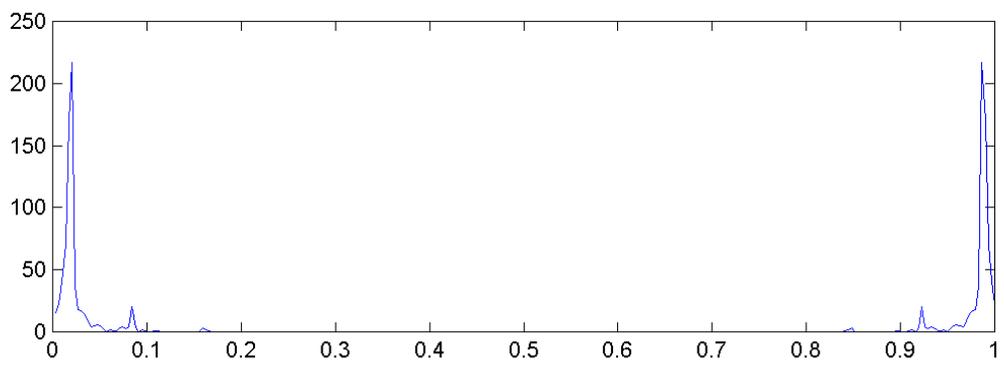
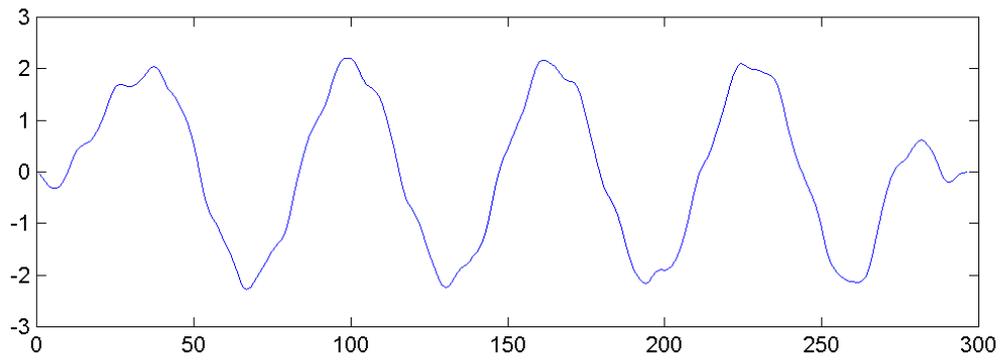
et dont les représentations en temps et en fréquence sont les suivantes:

TP d'introduction au filtrage numérique

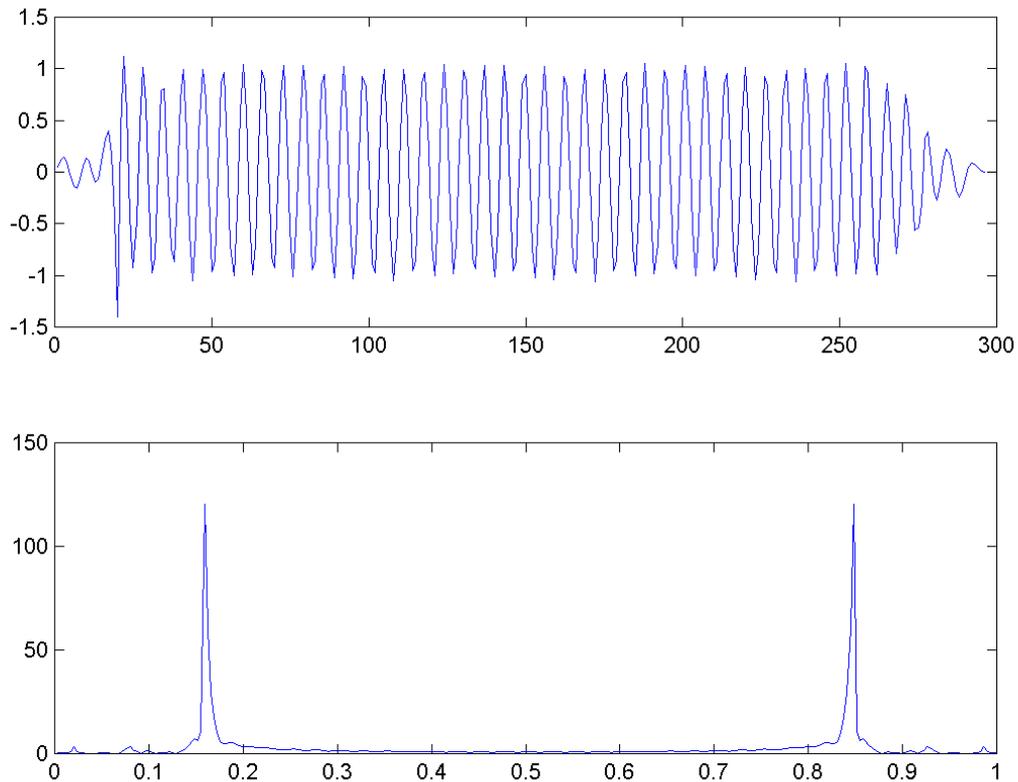


Des résultats de filtrage passe-bas, passe-bande et passe-haut sont montrés ci-dessous :

TP d'introduction au filtrage numérique



TP d'introduction au filtrage numérique



Sur la partie 2.1.2 (synthèse de Filtres RIF par échantillonnage en fréquence)

Générer les Gabarits échantillonnés en fréquence suivants :

Filtre Passe Bas : `FirPBasEch = [ones(1, 5), zeros(1, 10), ones(1, 4)] ;`

Filtre Passe Haut : `FirPHautEch = [zeros(1, 5), ones(1, 10), zeros(1, 4)] ;`

Filtre Passe Bande :

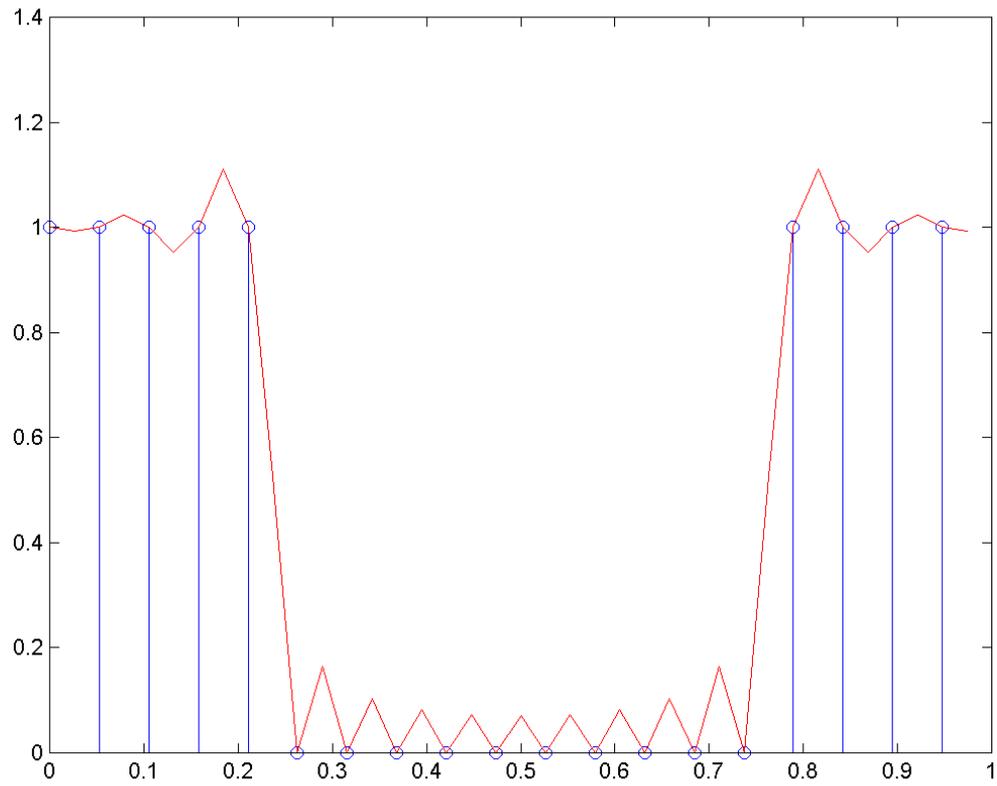
`FirPBandeEch = [zeros(1, 5), ones(1, 3), zeros(1, 4), ones(1, 3), zeros(1, 4)] ;`

Pour chacun des filtres :

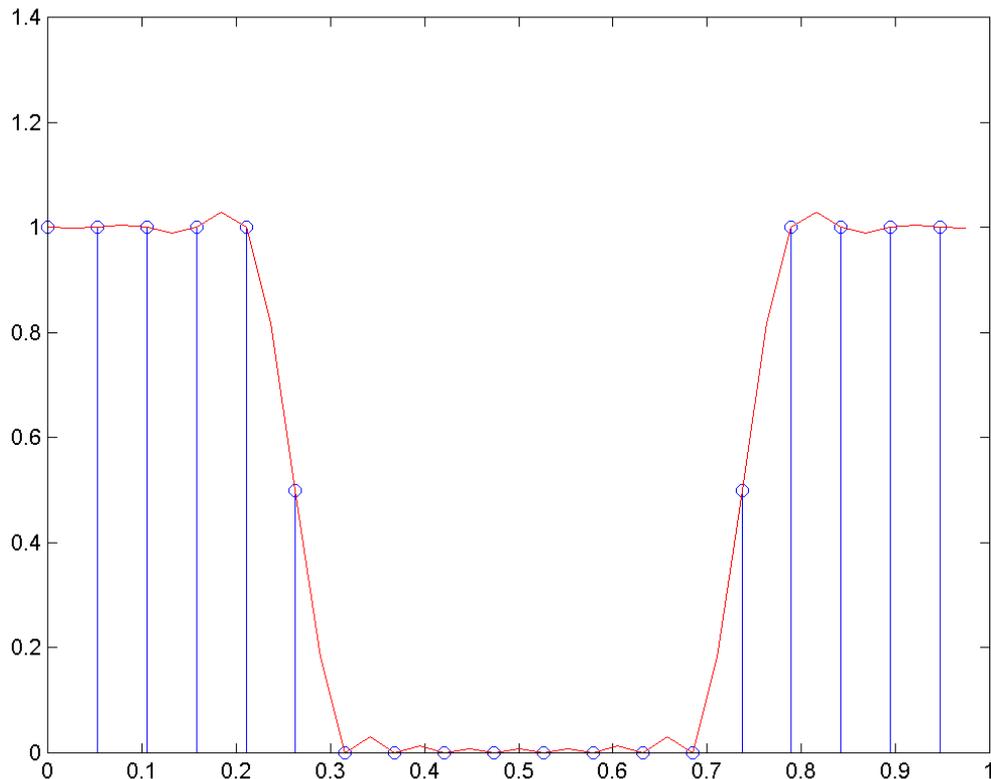
- Calculer la réponse temporelle
- Rendre celle-ci causale.
- Calculer la réponse en fréquence en calculant la FFT de la réponse impulsionnelle sur un nombre de points permettant de bien visualiser cette réponse en dehors des fréquences pour lesquelles elle a été imposée (sur-échantillonnage en fréquence).

Observer les phénomènes de sur oscillation et aménager la procédure de synthèse pour atténuer ce phénomène. La forme des résultats à obtenir est illustrée ci dessous :

TP d'introduction au filtrage numérique



TP d'introduction au filtrage numérique



Sur la partie 2.2.1 (synthèse heuristique de filtres AR)

Pour faire les différentes simulations de filtrage on utilisera la fonction filter de matlab.

On fera ainsi des essais comparatifs pour :

- Un filtre ARMA comportant 2 pôles comme décrit en 2.2.1,
- Un filtre ARMA comportant, en plus des 2 pôles comme ci-dessus, un zéro en $z = 1$ et un zéro en $z = -1$.

On visualisera les réponses en fréquence de ces filtres et on les appliquera ensuite à :

- Un signal rectangulaire (réponse indicielle),
- Un mélange de sinusoides comme déjà utilisé dans ce TP mais en prenant l'une des fréquences égale à la fréquence de résonance du filtre.

On construira dans le même esprit un filtre passe-bande à bande plus large en introduisant 2 (ou 3) paires de pôles conjugués placés à des fréquences voisines. On introduira également des zéros pour obtenir des atténuations plus franches. Dans un premier temps on développera, à partir des pôles et des zéros ainsi choisis, les polynômes en z^{-1} permettant de coder l'algorithme. Dans un deuxième temps on trouvera (après avoir réfléchi!) une manière d'utiliser filter, très simple, pour implémenter le filtrage sans avoir à développer les polynômes.

Sur la partie 2.2.2 (transformation bilinéaire)

Etudier expérimentalement avec matlab l'exemple présenté en 2.2.2