

TD de TRF – Liste 9

I. On rappelle que la distribution $\nu p\ 1/x$ se définit par :

$$\langle \nu p\ 1/x, \varphi \rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx, \quad \varphi \in S.$$

La fonction $\log|x|$ définit une distribution tempérée puisqu'elle est localement sommable et qu'elle ne croît pas plus vite qu'une puissance à l'infini.

Question : calculer la dérivée au sens des distributions de $\log|x|$.

II.

Notations

- $\mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(t)$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$;
- $P_T(t) = \sum_n \delta(t - nT)$ désigne le peigne de Dirac de période T . On rappelle que $P_T(t) \Leftrightarrow \frac{1}{T} P_{1/T}(\nu)$.

1. Soit a un nombre > 0 . Dessiner la fonction $\mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}(t/a)$ et calculer sa TF.

2. Si $x(t) \Leftrightarrow X(\nu)$, exprimer les coefficients de Fourier de la périodisée $x_p(t) = \sum_n x(t - nT)$ en fonction de $X(\nu)$.

Application. On suppose dans toute la suite $T > a$. Dessiner la fonction $q(t) = \frac{1}{a} \sum_n \text{rect}\left(\frac{t - nT}{a}\right)$ et calculer ses coefficients de Fourier. Quelle est la limite de $q(t)$ si $a \rightarrow 0$?

3. Soit B un nombre satisfaisant $0 < B < \frac{1}{2T}$ et $x(t)$ un signal dont la TF $X(\nu)$ est nulle pour $|\nu| > B$. On forme

$$y(t) = (1 + mx(t)) q(t),$$

où m est une constante non nulle. Calculer la TF $Y(\nu)$ de $y(t)$.

4. Soit $f_o = M/T$ un multiple entier de $1/T$ (où pratiquement M est $\gg 1$) et I_o et J_o les deux intervalles $I_o = [f_o - B, f_o + B]$, $J_o = [-f_o - B, -f_o + B]$. Le signal $y(t)$ traverse un filtre linéaire passe-bande parfait dont le gain complexe vaut 1 dans $I_o \cup J_o$ et 0 en dehors. Calculer les composantes fréquentielles de l'entrée dans ces deux intervalles. En déduire que la sortie du filtre vaut

$$z(t) = A(1 + mx(t)) \cos 2\pi f_o t,$$

où A est une constante que l'on calculera.

III. Théorème d'échantillonnage pour les signaux sur porteuse

Soit $z(t)$ un signal dont la TF $Z(\nu)$ est nulle hors de $I_o \cup J_o$ où $I_o = [f_o - B, f_o + B]$, $J_o = [-f_o - B, -f_o + B]$ et $f_o \geq B$. On l'échantillonne à la période θ , ce qui produit :

$$z_d(t) = \sum_n z(n\theta) \delta(t - n\theta).$$

1. Calculer $Z_d(\nu)$ en fonction de $Z(\nu)$. Soit M la partie entière de $(f_o - B)/2B$ et T le nombre défini par $(M + 1/2)/T = f_o$. Vérifier que $2B$ est $\leq 1/T$.

Montrer que si $\theta = T/2$, on a $-f_o + B + \frac{M}{\theta} \leq f_o - B$ et $-f_o - B + \frac{M+1}{\theta} \leq f_o + B$, de sorte que

$Z(\nu)$ et $Z_d(\nu)$ sont égales à un facteur près dans $I_o \cup J_o$. En déduire le théorème d'échantillonnage

pour les signaux sur porteuse : $z(t) = \sum_n z(n\theta) g(t - n\theta)$, $g(t) = 2\theta \frac{\sin 2\pi Bt}{\pi t} \cos 2\pi f_o t$.

2. On suppose dans cette question que $T = \frac{1}{2B}$ et donc $\theta = \frac{1}{4B}$.

Montrer que dans ce cas les fonctions $g_n(t) = g(t - n\theta)$ sont orthogonales, et en déduire la relation

$$\int_{\mathbb{R}} |z(t)|^2 dt = \theta \sum_n |z(n\theta)|^2.$$