TD 9 : Révisions

DEUG STPI, semestre 4, année 2003-2004

Exercice 1.

On considère la fonction périodique $x(t)$ de période 2 définie par :

$$x(t) = \begin{cases} -(1+t) & \text{si} \quad t \in [-1, -1/2] \\ t & \text{si} \quad t \in [-1/2, 1/2] \\ 1-t & \text{si} \quad t \in [1/2, 1] \end{cases} \tag{1}$$

Développer cette fonction en série de Fourier. Quelle est la nature de la convergence de cette série? Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \tag{2}$$

Exercice 2.

Développer en série entière la fonction $\frac{1}{1-x^2}$. En déduire la somme de la série entière suivante :

$$C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{3}$$

Exercice 3.

Soit V l'ensemble des fonctions du type $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{(t+1)^k}$. Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension? On considère à présent l'application $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple $(f(t),g(t))$ fait correspondre :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \tag{4}$$

Montrer que cette application est un produit scalaire. Trouver une base orthogonale de l'espace vectoriel V engendré par $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = \frac{1}{t+1}$ et $f_3(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$ par le procédé de Schmidt.