TD de TRF – Liste 8

0. Si $x(t) \rightleftharpoons X(\nu)$ et $y(t) \rightleftharpoons Y(\nu)$, compléter le tableau suivant, qui servira à résoudre la suite du problème :

$\overline{x}(t)$	$\rightleftharpoons$	?
$(x * y)(t) = \int x(\theta)\, y(t-\theta) d\theta$	$\rightleftharpoons$	?
$\Gamma_x(t) = \int x(\theta)\, \overline{x}(\theta - t) d\theta$	$\rightleftharpoons$	?
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	?

1. On admettra la relation suivante, qui n'est d'ailleurs pas difficile à établir :

$$\boxed{g(t,\alpha) = g_\alpha(t) = \frac{1}{e^{i\pi/4}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{i\pi t^2/\alpha}, \qquad \alpha > 0 \qquad G(\nu,\alpha) = G_\alpha(\nu) = e^{-i\pi\alpha\nu^2}} \quad . \qquad (1)$$

En déduire la TF de $\frac{1}{e^{-i\pi/4}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-i\pi t^2/\alpha}$, $\alpha > 0$. Le résultat trouvé montre que la relation (1) peut s'appliquer que α soit > 0 ou < 0, à condition, dans le deuxième cas, d'interpréter $\sqrt{-1}$ d'une certaine façon. Laquelle ? Compte tenu de la relation (1), comment doit-on interpréter $g(t,0)$? Toujours à l'aide de (1), calculer $g(t,\alpha) * g(t,\beta)$ et l'autocorrélation $\Gamma_{g_\alpha}(t)$.

2. Les TF mises en jeu dans la suite sont des TF à deux dimensions (2D) définies par :

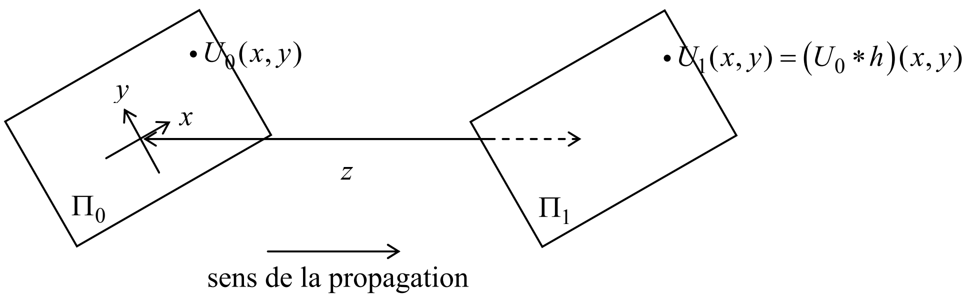
$$\hat{U}(\nu_x,\nu_y) = \iint e^{-2i\pi(x\nu_x + y\nu_y)}\, U(x,y) dxdy \; .$$

Calculer la TF de $U(x,y) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(x/a)\, \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(y/b)$, $a,b > 0$.

3. En optique, dans la théorie scalaire de la diffraction, le transfert en espace libre du champ $U_0(x,y)$ dans un plan Π_0 au champ $U_1(x,y)$ dans un plan Π_1 parallèle à Π_0 et situé à une distance z dans la direction de propagation est donné par la relation de Fresnel-Kirchhoff :

$$U_1(x,y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint e^{i\frac{\pi}{\lambda z}\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]} U_0(x_0,y_0) dx_0 dy_0 \; ,$$

où λ est la longueur d'onde et $k = 2\pi/\lambda$.

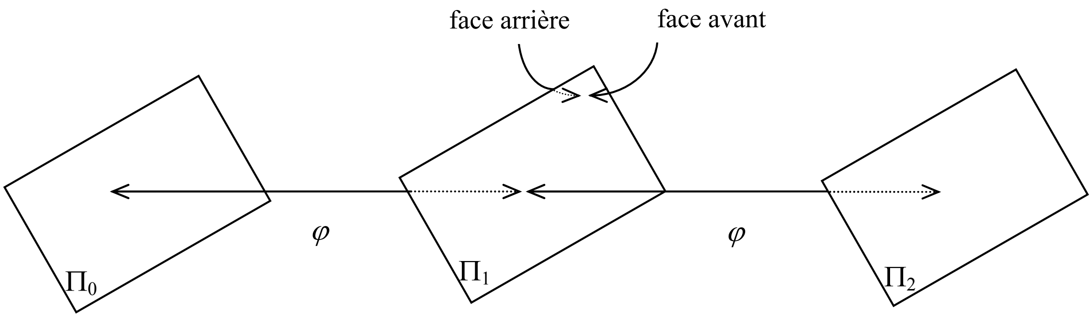


Question. Identifier l'intégrale de Fresnel-Kirchhoff comme une intégrale de convolution 2D (*i.e.* donner la fonction $h(x,y)$ telle que $U_1 = U_0 * h$). Si $\hat{U}_0$ et $\hat{U}_1$ sont les TF 2D du champ dans les plans Π_0 et Π_1, donner la relation entre $\hat{U}_1$ et $\hat{U}_0$. Quelle relation y a-t-il entre les modules de ces TF ?

4. Une lentille mince peut être assimilée à un transformateur de phase, c'est-à-dire à un organe sans épaisseur réalisant la transformation ponctuelle :

$$U_1'(x,y) = e^{-\frac{i\pi}{\lambda\varphi}(x^2+y^2)}\, U_1(x,y) \ ,$$

où $U_1(x,y)$ est le champ incident sur la face arrière de la lentille, $U_1'(x,y)$ est le champ émergeant sur la face avant, et φ est la distance focale (> 0 si la lentille est convergente, < 0 si elle est divergente). Supposant la lentille convergente ($\varphi > 0$), on se propose de trouver la relation d'entrée-sortie dans le schéma suivant :



plan focal objet plan de la lentille plan focal image

Montrer que le transfert entre le champ sur la face arrière de la lentille et le plan focal image est donné par :

$$U_2(x,y) = \frac{e^{ik\varphi}}{i\lambda\varphi}\, e^{\frac{i\pi}{\lambda\varphi}(x^2+y^2)}\, \hat{U}_1\left(\frac{x}{\lambda\varphi}, \frac{y}{\lambda\varphi}\right) .$$

Indication : écrire U_2 en fonction de U_1 et observer que les termes quadratiques de l'exponentielle complexe s'éliminent, ce qui fait apparaître une TF.

5. Exprimer $\hat{U}_1(\nu_x, \nu_y)$ en fonction de $\hat{U}_0(\nu_x, \nu_y)$, TF du champ dans le plan focal objet. En déduire la propriété de TF des lentilles minces

$$U_2(x,y) = \frac{e^{2ik\varphi}}{i\lambda\varphi}\, \hat{U}_0\left(\frac{x}{\lambda\varphi}, \frac{y}{\lambda\varphi}\right) ,$$

qui exprime que le champ dans le plan focal image est à un facteur près la TF du champ dans le plan focal objet.

6. L'œil ou n'importe quel détecteur optique n'est sensible qu'au module au carré du champ. Calculer la figure de diffraction $I_2(x,y) = |U_2(x,y)|^2$ si le champ dans le plan Π_0 est diaphragmé de façon que :

$$U_0(x,y) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(x/a)\, \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(y/b) .$$

Cette figure est-elle modifiée si

(i) le plan objet Π_0 est placé à une distance de la lentille égale à $d_1 \neq \varphi$?

(ii) le plan objet est à une distance φ, mais le plan image Π_2 est à une distance $d_2 \neq \varphi$?