Travaux Dirigés : Analyse Complexe (2)

Module de Mathématiques en Licence 3 d'électronique

`Laboratoire LTSI - UMR INSERM 642 - Université de Rennes1`

Exercice 1 :

Déterminer les points singuliers et les résidus correspondant des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f : z \longmapsto \cos(z)z^{-1} & g : z \longmapsto \sin(z)z^{-3} & k : z \longmapsto \sin(z)z^{-1} \\ u : z \longmapsto \exp((z-1)^{-1}) & v : z \longmapsto (1+z^4)^{-1} & w : z \longmapsto \sin^{-1}(z) \end{array}$$

Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos(\theta)} \qquad J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin(\theta)} \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{C}$ le contour défini par $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ où $z = x + \mathrm{i}y$ et où a et b sont supposés strictement positifs. Calculer l'intégrale de la fonction $f : z \longmapsto z^{-1}$ sur le contour $\mathcal{C}$ en utilisant le théorème des résidus d'une part, et expliciter cette intégrale d'autre part pour en déduire que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} = \frac{2\pi}{ab}$$

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{C}$ le contour défini par $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ où $\mathcal{C}_1$ est le demi-cercle de centre 0, de rayon R joignant les points R et $-R$, $\mathcal{C}_2$ est le segment joignant les points $-R$ et ϵ, $\mathcal{C}_3$ est le demi-cercle de centre 0, de rayon ϵ joignant les points $-\epsilon$ et ϵ, et $\mathcal{C}_4$ est le segment joignant les points ϵ et R. Calculer l'intégrale de la fonction $f : z \longmapsto \exp(\mathrm{i}z)z^{-1}$ sur le contour $\mathcal{C}$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 5 :

Calculer la transformée inverse de Fourier des fonctions définies de dans par :

$$\hat{f} : \nu \longmapsto (a + 2\mathrm{i}\pi\nu)^{-2} \qquad \hat{g} : \nu \longmapsto (a^2 + 4\pi^2\nu^2)^{-1} \qquad \hat{h} : \nu \longmapsto (\nu^4 + \nu^2 + 1)^{-1}$$

Exercice 6 :

Soit $\mathcal{C}$ le contour défini par $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ où $\mathcal{C}_1$ est le segment joignant les points 0 et R, $\mathcal{C}_2$ est l'arc de cercle de centre 0, de rayon R joignant les points R et $R\exp(i\pi/4)$, et $\mathcal{C}_3$ est le segment joignant les points $R\exp(i\pi/4)$ et 0. Calculer l'intégrale de la fonction $f : z \longmapsto \exp(\mathrm{i}z^2)$ sur le contour $\mathcal{C}$ et en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

On utilisera le résultat $\int \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$