

TD de TRF – Liste 7

I. Soit $f(t)$ la fonction définie par :

$$f(t) = \frac{1}{2^n} \text{ si } |t| \in \left] nT - \frac{T}{2}, nT + \frac{T}{2} \right[, n = 0, 1, 2, \dots$$

1. Montrer que sa TF vaut : $\hat{f}(\nu) = \frac{\sin \pi T \nu}{\pi \nu} \left[1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2\pi n T \nu}{2^n} \right] = \frac{\sin \pi T \nu}{\pi \nu} \frac{3}{5 - 4 \cos 2\pi T \nu}$.
2. Calculer la dérivée de $f(t)$ au sens des distributions.
3. Calculer la TF de cette dérivée, et retrouver le résultat établi en 1.

II. TF de $vp(1/t)$ de $Pf(1/t^2)$

(Rappel : la TF conserve la parité d'une distribution)

1. Quelles sont dans $\mathbf{S}'$ les solutions impaires de l'équation $xT = 1$?
2. Montrer que la TF de la distribution $vp(1/t)$ vaut $-2i\pi[U(\nu) - 1/2] = -i\pi \operatorname{sgn}(\nu)$, où $U(x)$ désigne l'échelon unité, et $\operatorname{sgn}(x) = 2[U(x) - 1/2]$ est la fonction "signe de x ".
3. La distribution $Pf(1/x^2)$ ("partie finie de $1/x^2$ ") est définie par :

$$\langle Pf(1/x^2), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right], \varphi \in \mathbf{S}.$$

Montrer que cette relation définit une distribution (commencer par établir la relation : $\langle Pf(1/x^2), \varphi \rangle = \langle vp(1/x), \varphi' \rangle$).

4. Trouver une relation entre $Pf(1/x^2)$ et la dérivée de $vp(1/x)$. En déduire la TF de $Pf(1/t^2)$. Exprimer le résultat en fonction de $|v|$.
5. Trouver toutes les distributions solutions de l'équation $xT = vp(1/x)$.
6. Soit S une distribution tempérée. On sait que si $S(t) \rightleftharpoons \hat{S}(\nu)$, $\hat{S}(t) \rightleftharpoons S(-\nu)$. En appliquant ce résultat à la distribution $Pf(1/t^2)$, montrer que

$$|t| \rightleftharpoons -\frac{1}{2\pi^2} Pf(1/\nu^2)$$

III. TF de l'échelon unité $U(t)$

1. De la relation $U' = \delta$, déduire que la TF $\hat{U}(\nu)$ de $U(t)$ est de la forme :

$$\hat{U}(\nu) = \frac{1}{2i\pi} vp(1/\nu) + C\delta$$

2. Montrer que $C = 1/2$ (on peut trouver C en observant que la fonction $U(t) - 1/2$ est impaire, et a donc une TF impaire).

IV. 1. On considère le filtre à temps continu de gain complexe $G(\nu) = -i \operatorname{sgn}(\nu)$, et on note $\tilde{s}(t)$ la réponse du filtre au signal d'entrée $s(t)$. Trouver les réponses $\tilde{s}_1(t)$ et $\tilde{s}_2(t)$ correspondant aux signaux d'entrée $s_1(t) = \cos 2\pi f_0 t$, $s_2(t) = \sin 2\pi f_0 t$, où f_0 est un nombre > 0 .

2. Trouver la réponse percutonnelle $g(t)$ du filtre de gain complexe $G(\nu)$. En déduire que

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\pi} vp \int_{\mathbb{R}} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (1)$$

La relation (1) définit la transformée de Hilbert du signal $s(t)$.

3. On considère le filtre de gain complexe $H(\nu)$ égal à $+2$ si $\nu > 0$ et à 0 si $\nu < 0$. Trouver la réponse de ce filtre au signal d'entrée $s(t) = \cos 2\pi f_0 t$. Exprimer $H(\nu)$ en fonction du gain $G(\nu)$ de la 1^{ère} question. En déduire la réponse percutonnelle $h(t)$ de $H(\nu)$.

Propriétés élémentaires de la TF des distributions tempérées

propriété de	$T(t)$	$\hat{T}(v)$
réciprocité	$\hat{T}(t)$	$T(-v)$
retournement	$T(-t)$	$\hat{T}(-v)$
conjugaison	$\bar{T}(t)$	$\overline{\hat{T}}(-v)$
modulation	$T(t) e^{i2\pi v_0 t}$	$\hat{T}(v - v_0)$
translation	$T(t - t_0)$	$\hat{T}(v) e^{-i2\pi v t_0}$
convolution	$(T * G)(t)$ TG	$\hat{T}(v) \hat{G}(v)$ $\hat{T} * \hat{G}$
dérivation	$T^{(n)}(t)$ $t^n T(t)$	$(i2\pi v)^n \hat{T}(v)$ $\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \hat{T}^{(n)}(v)$

TF de distributions élémentaires

	$T(t)$	$\hat{T}(v)$
1	$\delta(t)$, $\delta(t - a)$ $\delta^{(p)}(t)$	1 , $e^{-i2\pi va}$ $(i2\pi v)^p$
2	1 , $e^{i2\pi at}$ t^p	$\delta(v)$, $\delta(v - a)$ $\left(\frac{i}{2\pi}\right)^p \delta^{(p)}(v)$
3	$vp \left(\frac{1}{t}\right)$	$-i\pi \operatorname{sgn}(v)$
4	$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{1}{i\pi} vp \left(\frac{1}{v}\right)$
5	$Pf\left(\frac{1}{t^2}\right)$	$-2\pi^2 v $
6	$ t $	$-\frac{1}{2\pi^2} Pf\left(\frac{1}{v^2}\right)$
7	$U(t)$	$\frac{1}{2i\pi} vp \left(\frac{1}{v}\right) + \frac{1}{2} \delta(v)$
8	Peigne de Dirac de période θ $P_\theta(t) = \sum_n \delta(t - n\theta)$ $= \frac{1}{\theta} \sum_n e^{in2\pi \frac{t}{\theta}}$ (sa SF)	Peigne de Dirac de période $1/\theta$ $\frac{1}{\theta} P_{\frac{1}{\theta}}(v) = \frac{1}{\theta} \sum_n \delta\left(v - \frac{n}{\theta}\right)$