TD 7 : Espaces euclidiens (1)

DEUG STPI, semestre 4, année 2003-2004

Exercice 1.

Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire. Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension m. Montrer que l'application qui à tout vecteur v de V fait correspondre sa projection orthogonale est une application linéaire. On notera cette application Π_W, c'est-à-dire que l'on notera $v/W = \Pi_W(v)$. Montrer que $\Pi_W \circ \Pi_W = \Pi_W$, et que pour tous vecteurs v et v',

$$\left\langle \Pi_W(v), v' \right\rangle = \left\langle v, \Pi_W(v') \right\rangle = \left\langle \Pi_W(v), \Pi_W(v') \right\rangle \tag{1}$$

En déduire que pour tout vecteur v, $\langle \Pi_W(v), v \rangle \geq 0$.

Exercice 2.

On considère l'espace $V = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. Soit W_1 l'espace vectoriel engendré par le vecteur $w_1 = (1,1,1)^{\intercal}$, et soit v un vecteur quelconque de V. Calculer la projection orthogonale de v sur W_1. On considère à présent l'espace vectoriel W_2 engendré par les vecteurs $(1,-1,1)$ et $(1,1,0)$. Calculer la projection orthogonale de v sur W_2. Même question si l'on considère l'espaace W_3 engendré par $(1,-1,1)$ et $(1,-1,0)$.

Exercice 3.

Soit V l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, i.e. les éléments de V sont les fonctions du type $f(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$. Montrer que V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension? On considère à présent l'application de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple de polynômes $f(t)$, $g(t)$ fait correspondre :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \tag{2}$$

Montrer que cette application est un produit scalaire. Trouver une base orthogonale de V par le procédé de Schmidt.