Travaux Dirigés : Analyse Complexe (1)

Module de Mathématiques en Licence 3 d'électronique

Laboratoire LTSI - UMR INSERM 642 - Université de Rennes1

Exercice 1 : Soit w la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ par $w:(x,y) \longmapsto x^2+ay^2-2xy+\mathrm{i}(bx^2-y^2+2xy)$. Pour quelles valeurs de a et b cette dernière est-elle holomorphe ? Calculer la dérivée de w pour ces valeurs de a et b, puis l'exprimer ainsi que w elle-même en fonction de $z=x+\mathrm{i}y$.

Exercice 2 : Soit P l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $P:(x,y) \longmapsto 2x(1-y)$. Donner une fonction Q définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $f=P+\mathrm{i}Q$ soit holomorphe en la variable $z=x+\mathrm{i}y$.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f:z \longmapsto z^2+3z$. Evaluer l'intégrale de f le long du contour $\mathcal{C}$ quand :

a) $\mathcal{C}$ est le segment complexe d'extrimités 2 et $2\mathrm{i}$;

b) $\mathcal{C}$ est composé des deux segments joignant les points 2, $2+2\mathrm{i}$ et $2\mathrm{i}$;

c) $\mathcal{C}$ est l'arc de cercle de rayon $R=2$, reliant les points 2 et $2\mathrm{i}$;

Exercice 4 : Reprendre l'exercice 3 en définissant cette fois f par $f:z \longmapsto z+\bar{z}$.

Exercice 5 : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre z_0 et de rayon R. Montrer que :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\mathrm{i}\pi \text{ si } n=1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que ce résultat reste valable si $\mathcal{C}$ est un chemin fermé simple entourant z_0.

Exercice 6 : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Evaluer l'intégrale des deux fonctions suivantes le long de $\mathcal{C}$ entre les points 1 et i.

$$f : z \longmapsto 1+z^2 \qquad\qquad g : z \longmapsto z+\frac{1}{z}$$

Les conditions de Cauchy sont-elles vérifiées pour les fonctions ci-dessus ?

Exercice 7 : Soit w la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ par $w:(x,y) \longmapsto x^2+y+\mathrm{i}(y^2+2x)$. Soit f la fonction définie $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par w en posant $z=x+\mathrm{i}y$.

1. Etudier la dérivabilité de f au moyen des conditions de Cauchy ;
2. Evaluer l'intégrale de f le long deux chemins $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ définis à partir du triangle de sommets 0, i et 1 : $\mathcal{C}_1$ désigne l'hypothénus du triangle et $\mathcal{C}_2$ l'union des deux autres côtés ;
3. Commenter les résultats obtenus précédemment.