TD de TRF – Liste 6

I. Convolution et intercorrélation périodiques

1. Soient f et g deux fonctions continues et de période T. Leur convoluée périodique et leur intercorrélation périodique sont les fonctions définies respectivement par

$$h(t) = \int_0^T f(\theta)\ g(t-\theta)\ d\theta \qquad (1)$$

$$r(t) = \int_0^T f(\theta)\ \overline{g}(\theta - t)\ d\theta \qquad (2)$$

Montrer que h et r admettent la période T, et que leurs coefficients de Fourier valent respectivement

$$c_n(h) = Tc_n(f)c_n(g)\ ,\ c_n(r) = Tc_n(f)\overline{c_n(g)}\,.$$

2. Soient f_1 et g_1 deux fonctions continues nulles respectivement hors de $[0,\theta_1]$ et $[0,\theta_2]$. Trouver deux intervalles fermés en dehors desquels les deux fonctions suivantes sont nulles :

$$h_1(t) = (f_1 * g_1)\ (t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(\theta)\ g_1(t-\theta)\ d\theta\ ,\ r_1(t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(\theta)\ \overline{g_1}(\theta - t)\ d\theta\,.$$

3. On suppose que les fonctions f et g de la question **1.** sont obtenues en périodisant les fonctions f_1 et g_1 de la question **2.** avec la période T :

$$f(t) = \sum_n f_1(t - nT) \quad , \quad g(t) = \sum_n g_1(t - nT)\ .$$

Comment choisir T pour que

$$h_1(t) = h(t) \quad \text{si} \quad 0 \le t \le \theta_1 + \theta_2$$

$$r_1(t) = r(t) \quad \text{si} \quad -\theta_2 \le t \le \theta_1\ ?$$

II. Même exercice avec des suites

1. Soit $[x(0),...,x(N-1)]$ une suite de N nombres complexes. Sa transformée de Fourier discrète (TFD) est la suite définie par :

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk}\ x(k), \quad \text{où}\ \ W = e^{-2i\pi/N} \quad \text{et} \quad 0 \le n \le N-1\,. \qquad \text{(1-a)}$$

Montrer que :

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W^{-kn}\hat{x}(n)\,,\quad 0 \le k \le N-1\,. \qquad \text{(1-b)}$$

2. Soient $\{x(n)\}$ et $\{y(n)\}$ deux suites de nombres complexes admettant la période N. Leur convoluée périodique et leur intercorrélation périodique sont définies respectivement par :

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\ y(n-k) \quad , \quad r(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\ \overline{y(k-n)}\,.$$

Ces deux suites admettent la période N. Montrer que :

$$\hat{h}(n) = \hat{x}(n)\ \hat{y}(n) \quad , \quad \hat{r}(n) = \hat{x}(n)\ \overline{\hat{y}(n)} \quad , \quad 0 \le n \le N-1\,.$$

3. Soient $\{x_1(n)\}$ et $\{y_1(n)\}$ deux suites de nombres complexes nulles respectivement hors de $[0, N_1 - 1]$ et $[0, N_2 - 1]$. Trouver deux intervalles fermés hors desquels les deux suites :

$$h_1(n) = \sum_k x_1(k)\ y_1(n-k) \quad , \quad r_1(n) = \sum_k x_1(k)\ \overline{y_1(k-n)}\ \ \text{sont nulles.}$$

4. Les deux suites de la question **2.** sont supposées construites en périodisant celles de la question **3.** avec la période N :

$$x(n) = \sum_k x_1(n - kN) \quad , \quad y(n) = \sum_k y_1(n - kN)\,.$$

Trouver les conditions sur N pour que :

$$h_1(n) = h(n) \quad \text{si} \quad 0 \le n \le N_1 + N_2 - 2\ ,\ r_1(n) = r(n) \quad \text{si} \quad -N_2 + 1 \le n \le N_1 - 1\ .$$

III. 1. Soit f une fonction sommable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{T\to\infty} T\ f(Tx) = C\delta(x)$, où $C = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx$.

Quelle est la limite de $L_a(t)$, définie à l'exercice **I.** de la liste 5, si a tend vers 0 en décroissant ?

2. Application : on considère les deux fonctions

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \quad , \quad g(x) = f(x)/x^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad f(0) = g(0) = 0\ .$$

Ces fonctions sont-elles continues ? Sont-elles sommables ? Montrer que leurs intégrales dans $(0,\infty)$ sont égales, et que l'intégrale de leur somme dans $(0,\infty)$ vaut 1.

En déduire les limites de $\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$ et $\frac{1}{a} g\left(\frac{x}{a}\right)$ si a tend vers zéro en décroissant.

3. On note $D_T(x)$ le noyau de Dirichlet et $F_T(x)$ celui de Fejer :

$$D_T(x) = \frac{\sin \pi T x}{\pi x} \quad , \quad F_T(x) = \frac{1}{T}\ D_T^2(x)\ .$$

Rappeler la TF inverse de $D_T(\nu)$. En déduire celle de $F_T(\nu)$, et les valeurs des intégrales $\int_{\mathbb{R}} D_T(x)\ dx$ et $\int_{\mathbb{R}} F_T(x)\ dx$. Calculer $D_T * D_T$. Quelle est la limite au sens des distributions de $D_T(x)$ et de $F_T(x)$ si $T \to \infty$?

IV. Sélectivité des filtres à horizon fini

Soit $h(t)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue, admettant une dérivée continue par morceaux, nulle hors de $[-T/2, T/2]$, et normée à un $\left(\|h\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} h^2(t) dt = 1\right)$. La largeur de bande B de sa TF $H(\nu)$ est définie par la relation

$$B^2 = \int_{\mathbb{R}} \nu^2 \left|H(\nu)\right|^2 d\nu\ .$$

On se propose de montrer que, quelle que soit la fonction h, on a toujours $2BT \geq 1$, l'égalité ayant lieu ssi $h(t)$ est égale à une arche de cosinus

$$h(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\ \cos\frac{\pi t}{T}\ \mathbb{1}_{[-T/2, T/2]}(t)\ . \qquad (1)$$

1. Montrer que le problème de minimiser B sous la contrainte $\|h\|^2 = 1$ équivaut à minimiser $\|h'\|^2$ sous cette même contrainte.

2. Le calcul des variations nous apprend que les fonctions $h(t)$ qui satisfont ces contraintes sont solutions de l'équation différentielle

$$h''(t) + \lambda h(t) = 0 \quad , \quad \lambda > 0 \quad , \quad \lambda \text{ minimal}\ .$$

Intégrer cette équation différentielle et trouver toutes les valeurs de $\lambda > 0$ telles que $h(\pm T/2) = 0$.

Montrer que la valeur de λ qui minimise B est telle que $\sqrt{\lambda} = \frac{2}{T}\frac{\pi}{2}$, et en déduire la solution (1).

3. Montrer que cette solution vérifie $2BT = 1$.