TD : Réduction d'endomorphisme - Séries numériques

Compléments mathématiques
Licence STS Mention Electronique, année 2004-2005

Exercice 1.

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice définie par $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a, b, c appartenant à $\mathbb{C}$, la matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque cela est possible, diagonaliser $\boldsymbol{A}$.

Exercice 2.

Etudier les séries numériques de terme général :
1. $U_n = \frac{1}{n^a}$ pour $n \geq 1$;
2. $V_n = \frac{1}{n(\log(n))^a}$ pour $n \geq 2$;
3. $W_n = \frac{a^n}{n!}$ pour $a \in [0, +\infty[$.

Exercice 3.

Que peut-on dire des séries numériques de terme général :
1. $U_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$ pour $n \geq 1$;
2. $V_n = \frac{e^{in\theta}}{n^a}$ pour $n \geq 1$, $\frac{\theta}{2\pi}$ non entier et $\alpha > 0$;
3. $W_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ pour $n \geq 2$ et $a > 0$.

Exercice 4.

Soit $U_n = \frac{\sin(n)}{n^a}$, où a est un nombre réel strictement positif.
1. Montrer que U_n est absolument sommable pour $a > 1$;
2. montrer que U_n est sommable pour $a > 0$, en l'occurrence pour $a \in]0, 1]$;
3. montrer que U_n est n'est pas absolument sommable pour $a \in]0, 1]$.

Exercice 5.

Etudier les séries numériques de terme général :
1. $U_n = \left(\frac{\log(n)}{n}\right)^2$ pour $n \geq 1$;
2. $V_n = \log\left(1 + (-1)^n \frac{\log(n)}{n}\right)$ pour $n \geq 1$;
3. $W_n = \log\left(1 - \frac{\log(n)}{n}\right)$ pour $n \geq 1$.