TD de TRF – Liste 5

I. 1. Calculer la TF de la ligne 1 du tableau. En déduire les lignes 2 et 3 en appliquant la propriété de retournement, et la ligne 4 avec la propriété de réciprocité.

2. Retrouver par les résidus la TF (ligne 4) de $L_a(t) = \dfrac{a}{\pi\left(a^2+t^2\right)}$, $a > 0$.

En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{\mathbb{R}} L_a(t)\ L_b(t)\ dt$.

Montrer que $\left(L_a * L_b\right)(t) = L_c(t)$, avec $c = a + b$.

II. 1. $U(t)$ est l'échelon unité (1 si $t \geq 0$, 0 si $t < 0$). Montrer que le produit de convolution de deux fonctions causales et localement sommables $U(t)\,f(t)$ et $U(t)\,g(t)$ est une fonction causale et localement sommable.

2. Calculer les produits : $\left(U(t)\,e^{-at}\right) * \left(U(t)\,e^{-at}\right) = \left(U(t)\,e^{-at}\right)^{*2}$, $\left(U(t)\,e^{-at}\right)^{*3}$, $\left(U(t)\,e^{-at}\right)^{*n}$, ainsi que leur TF (lignes 1 et 5 du tableau).

III. Relation entre la "largeur" d'une fonction et celle de sa TF.
Soit *f* une fonction à valeurs réelles, de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, normée à l'unité :

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(t)\ dt = 1.$$

f est continue et admet une dérivée f' continue par morceaux.

Sa largeur *T* (domaine temporel) et la largeur de bande *B* de sa TF $\hat{f}(\nu)$ (domaine fréquentiel) sont définies par les valeurs quadratiques moyennes :

$$T^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 f^2(t)\ dt\ ,\ B^2 = \int_{\mathbb{R}} \nu^2 \left|\hat{f}(\nu)\right|^2\ d\nu\,.$$

On se propose de montrer que, quelle que soit la fonction *f*, on a toujours $BT \geq 1/4\pi$, l'égalité ayant lieu ssi *f* est une gaussienne.

1. Montrer que le produit scalaire (tf, f') est égal à – ½. En appliquant l'inégalité de Schwarz à ce produit scalaire, établir l'inégalité :

$$\|tf\|^2 \cdot \left\|\nu\hat{f}\right\|^2 \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{BT \geq \frac{1}{4\pi}}$$

2. En revenant à l'inégalité de Schwarz, montrer que le produit *BT* atteint sa borne inférieure lorsque *f* est une gaussienne.
(Indication : intégrer une équation différentielle du 1er ordre pour *f*).

IV. La TF d'une fonction à symétrie sphérique dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $f\left(t_1,t_2,t_3\right)$ une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}$ à symétrie sphérique : $f\left(t_1,t_2,t_3\right) = \Phi\left(\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}\right)$.

Montrer par un calcul direct que $\hat{f}\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right) = \Psi\left(\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2}\right)$, où $\Psi(\rho) = \dfrac{2}{\rho}\displaystyle\int_0^{\infty} r\sin(2\pi\rho r)\,\Phi(r)\,dr$.

(Indication : orienter l'axe Ot_3 dans la direction du vecteur $\vec{\nu} = \left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)$; θ l'angle entre $\vec{t}$ et $\vec{\nu}$, alors : $\vec{\nu}\cdot\vec{t} = \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3 = \nu t\cos\theta$).

Propriétés élémentaires de la TF des fonctions dans L^1

Rappel :

La TF de $f(t): \hat{f}(\nu)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\ e^{-i2\pi\nu t}dt$ est une fonction continue qui s'annule à l'infini.

Formule d'inversion : $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat{f}(\nu)\ e^{i2\pi\nu t}d\nu=\begin{cases} f(t) \\ \big(f(t+0)+f(t-0)\big)/2 \end{cases}$

propriété de	$f(t)$	$\hat{f}(\nu)$
réciprocité	$\hat{f}(t)$	$f(-\nu)$
retournement	$f(-t)$	$\hat{f}(-\nu)$
conjugaison	$\overline{f}(t)$	$\bar{\hat{f}}(-\nu)$
modulation	$f(t)\ e^{i2\pi\nu_o t}$	$\hat{f}(\nu-\nu_o)$
translation	$f(t-t_o)$	$\hat{f}(\nu)\ e^{-i2\pi\nu t_o}$
convolution	$f*g$ fg	$\hat{f}(\nu)\ \hat{g}(\nu)$ $\hat{f}*\hat{g}$
dérivation	$f^{(n)}(t)$ $t^n f(t)$	$(i2\pi\nu)^n\ \hat{f}(\nu)$ $\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \hat{f}^{(n)}(\nu)$

et si f et $g\in L^2$: $\hat{f}$ et $\hat{g}\in L^2$, $(f,g)=(\hat{f},\hat{g})$, $\|f\|=\|\hat{f}\|$ (conservation du produit scalaire par passage à la TF)

TF de fonctions élémentaires

	$f(t)$, $a>0$	$\hat{f}(\nu)$
1	$U(t)\ e^{-at}$	$\dfrac{1}{a+i2\pi\nu}$
2	$e^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$
3	$\mathrm{sgn}(t)\ e^{-a\|t\|}$	$-i\dfrac{4\pi\nu}{a^2+4\pi^2\nu^2}$
4	$\dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2+t^2}$	$e^{-2\pi a\|\nu\|}$
5	$U(t)\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}, n\geq 1$	$\dfrac{1}{(a+i2\pi\nu)^n}$
6	$U(t)\ e^{-at}\sin(2\pi\nu_o t)$	$\dfrac{2\pi\nu_o}{(a+i2\pi\nu)^2+(2\pi\nu_o)^2}$
7	(*) $\mathrm{rect}(t/2a)$	$\dfrac{\sin(2\pi\nu a)}{\pi\nu}$
8	$\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{\|t\|}{a}\right)\ \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{2a}\right)$	$\left[\dfrac{\sin(\pi\nu a)}{\pi\nu a}\right]^2$
9	$(t/a)\ \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{2a}\right)$	$2ia\dfrac{2\pi\nu a\cos(2\pi\nu a)-\sin(2\pi\nu a)}{(2\pi\nu a)^2}$
10	$\dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{t^2}{2a^2}\right)$	$\exp\left[-\dfrac{1}{2}(2\pi\nu a)^2\right]$

(*) $\mathrm{rect}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } |x|\leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$