TD 5 : Séries de Fourier

DEUG STPI, semestre 4, année 2003-2004

Exercice 1.

Soient f une fonction T-périodique, continue par morceaux et N un entier naturel non nul. Calculer en fonction des coefficients de Fourier (exponentiels) de f les coefficients de Fourier (exponentiels) des applications suivantes (on vérifiera qu'elles sont bien T-périodiques et continues par morceaux) :
1. $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}N\omega t} f(t)$
2. $f_N(t) = f(Nt)$

Exercice 2.

Soit $x(t)$ la fonction définie par $x(t) = |\cos(t)|$. Quelle est la période de $x(t)$? Calculer le développement en série de Fourier sous forme réelle et complexe de $x(t)$. En déduire la valeur de la somme de la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$.

Exercice 3.

Soit la fonction $x(t)$ périodique de période T définie par :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [-T/2,0[\\ 1 & \text{si} \quad t \in [0,T/2] \end{cases} \tag{1}$$

Calculer le développement en série de Fourier de $x(t)$.

Exercice 4.

Soit $x(t)$ la fonction définie par $x(t) = (\cos(t))^4$. Quelle est la période de $x(t)$? Calculer le développement en série de Fourier sous forme réelle et complexe de $x(t)$.

Exercice 5.

Soit la fonction $x(t)$ périodique de période 1 donnée par :

$$x(t) = \begin{cases} t + 1/2 & \text{si} \quad t \in [-1/2,0[\\ -t + 1/2 & \text{si} \quad t \in [0,1/2] \end{cases} \tag{2}$$

Représenter graphiquement $x(t)$. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients du développement en série de Fourier sous forme complexe de $x(t)$. Montrer que :

$$X_n = 2\int_0^{1/2} x(t)\cos(2\pi nt)\,dt \tag{3}$$

pour tout n. Calculer X_n. En déduire la valeur de la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^2}$.