TD : Espaces vectoriels (4)

Compléments mathématiques
Licence STS Mention Electronique

Exercice 1.

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et les applications $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$ définies par $f(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta, 2\alpha)$ et $g(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in E$.

1. Démontrer que f et g sont des automorphismes de E et déterminer f^{-1} et g^{-1}.
2. On pose $h = f \circ g - g \circ f$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(h)$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? h est-elle injective ? Déterminer $\mathrm{Im}\,(h)$. h est-elle surjective ?

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer la matrice associée à f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3.

On considère les trois matrices, à coefficients réels, suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits AB, AC et BA. Que remarque-t-on ?
2. Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2.

Exercice 4.

1. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $N \times N$ à coefficients réels. Ecrire la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$ par $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{trace}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\top)$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Exercice 5.

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice définie par $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a, b, c appartenant à $\mathbb{C}$, la matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque cela est possible, diagonaliser $\boldsymbol{A}$.