Magistère MIT

TD Traitement du Signal : étude modulation/démodulation analogique avec bruit.

<u>Exercice 1</u>. Système à démodulation cohérente.

On considère un signal du type modulation analogique d'amplitude :
$S(t) = A(t).P(t), P(t) = \cos(2\pi f_0 t + \Phi), t \in R$

Le signal modulant $A(t)$ est stationnaire au sens large et admet une DSP nulle pour $|f| > \frac{B}{2}$ et égale à $1 - \frac{|2f|}{B}$ sinon. La phase Φ est une V.A. de loi équirépartie entre 0 et 2π, f_0 étant une fréquence fixée. Au cours de la transmission un bruit $B_1(t), t \in R$ gaussien, centré, de covariance stationnaire et de DSP égale à la constante $\frac{N_0}{2}$ sur R, s'ajoute à S. En réception la somme $X(t) = S(t) + B_1(t), t \in R$ est présentée sur l'entrée d'un démodulateur (dit cohérent) qui fournit en sortie un signal de démodulation
$Y(t) = (Z * H)(t), t \in R$ où $Z(t) = X(t).R(t), t \in R$ et $R(t) = \cos(2\pi f_0 t + \Phi + \Delta), t \in R$. $R(t)$ est un signal généré localement le plus en phase possible avec $P(t)$, Δ étant une erreur d'ajustement de phase considérée plus loin comme une V.A.. Les quantités aléatoires A, Φ, B_1, Δ sont modélisées comme étant indépendantes dans l'ensemble. Le filtre H est destiné à éliminer les composantes de fréquences élevées.

1) Si le filtre H est tel que $\widehat{H}(f) = 2, |f| \leq \frac{B}{2}, = 0$ ailleurs et si $\Delta = 0$ montrer que $Y(t) = S(t)$.

2) Calculer $C_X(t,t'), (t,t') \in R^2$ et en déduire la DSP $\gamma_X(f), f \in R$.

3) Montrer que $B_2(t) = \sqrt{2} B_1(t) \cos(2\pi f_0 t + \Phi + \Delta), t \in R$ admet une DSP $\gamma_{B_2}(f), f \in R$ égale à celle de B_1.

4) Calculer le rapport $E((Y\ (t) - A(t))^2) / E(A^2(t))$ dans le cas où Δ est égale à zéro puis dans le cas où Δ est de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Interpréter ce rapport et l'influence de Δ.

<u>Exercice 2.</u>

.On considère un signal aléatoire X à valeurs dans R, centré, stationnaire au sens large et admettant pour DSP :

$$\gamma_x(f) = 1 - \frac{||f| - f_o|}{B} \text{ pour } ||f| - f_0| \leq B \text{ et =0 sinon, avec } 0 < B < f_0$$

On considère d'autre part $Y(t) = A_x(t)$ obtenu par la convolution de X avec un filtre linéaire de réponse en fréquence $\hat{H}(f) = 2.U(f)$ sur R où U désigne l'échelon unité.

1) Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre H ?

2) Quelle est la densité spectrale de puissance $\gamma_{A_X}(f), f \in R$ du signal aléatoire A_X ?

3) On introduit l'enveloppe complexe E_X de X relative à la fréquence f_0 définie par :

$$E_X(t) = e^{-2\pi i f_0 t}.A_X(t)$$

On considère la décomposition en parties réelle et imaginaire de E_X, $E_X(t) = R(t) + i.I(t)$.

a).Exprimer $X(t)$ en fonction $R(t), I(t), \cos(2\pi f_0 t), \sin(2\pi f_0 t)$.

b) Montrer que R et I sont deux signaux aléatoires décorrélés (càd de densité spectrale croisée nulle puisqu'ils sont centrés) et qu'ils admettent la même DSP que l'on exprimera.

Indication : on posera $2iI = E_X - E_X^*$ et $2R = E_X + E_X^*$ et on utilisera la formule des interférences.

Exercice 3. Démodulation d'enveloppe (dite démodulation non cohérente).

On ne suppose plus ici disposer d'un signal de référence porteuse à la réception. .On modifie en conséquence le système comme suit :

- le signal d'émission est modifié en un signal X_1 obtenu en remplaçant $A(t)$ par $C(1+kA(t))$ où k est une constante réelle choisie telle que la probabilité pour que $kA(t) < -1$ est négligeable et où C est une autre constante réelle permettant d'ajuster la puissance à l'émission.
- le récepteur reconstruit à partir du signal reçu le signal d'enveloppe Y_1 (au moyen d'un dispositif non linéaire) comme suit:

$Y_1(t) = \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}, t \in R$ où α et β correspondent respectivement à la partie réelle et à la partie imaginaire de l'enveloppe complexe du signal reçu et préfiltré, enveloppe complexe définie par :

$$E_X(t) = e^{-2\pi i f_0 t} TF^{-1}(2\widehat{U}(.)\widehat{X_1}(.)\widehat{G}(f))(t), t \in R$$

où G correspond à un filtre passe bande, de bande passante centrée sur f_0 et de largeur de bande juste nécessaire à préserver l'information utile. Ce filtre est placé en amont du démodulateur d'enveloppe .

1) Dans la décomposition de $V(t) = G(t) * X_1(t)$, $V(t) = \alpha(t)\cos(2\pi f_0 t) - \beta(t)\sin(2\pi f_0 t), t \in R$, exprimer α et β sous la forme d'une somme de termes dépendant respectivement du signal et du bruit et que l'on caractérisera statistiquement.

2) Etudier la puissance statistique moyenne de la composante de bruit dans Y_1 dans le cas où on peut considérer que le niveau de bruit est faible devant le niveau de signal en entrée du démodulateur après passage dans le filtre passe bande.

Exercice 4. Comparaison entre les 2 systèmes de démodulation (cohérente et non cohérente)

1) En supposant que l'on présente le même signal d'émission S_1 , d'une part en entrée du système à démodulation cohérente, et d'autre part en entrée du système à démodulation non cohérente, comparer les rapports signal à bruit respectifs sur Y à niveau de bruit faible. Que peut-on dire qualitativement dans le cas où le niveau de bruit est au contraire élevé.

2) On suppose que la puissance statistique moyenne du signal émis est réglée à une valeur P_0 aussi bien pour le signal S que pour le signal S_1 en introduisant un facteur multiplicatif réel sur S et en ajustant C pour S_1 . On suppose également que, $A(t), t \in R$ étant supposé gaussien, la probabilité $P(|A(t)| > 3\sigma_{A(t)})$ est négligeable. En conséquence on prend $k = 1/(3\sigma_{A(t)})$. Toujours dans l'hypothèse de bruit faible, comparer à nouveau les rapports signal à bruit en sortie de chaque système (les signaux d'entrée étant cette fois évidemment S pour le premier et S_1 pour le 2ème). Pensez vous qu'il soit justifié d'effectuer une telle comparaison?