Université Rennes1, M1 Electronique
TD en traitement du signal (sur cours Bellanger): liste 4

Exercice n°1

On présente un bruit blanc gaussien centré $B(t), t \in R$ de densité spectrale $\gamma_B(f) = N_0/2 = cte\ \forall f \in R$ à l'entrée d'un filtre linéaire et homogène de réponse:

$$H(t) = \frac{1}{T}\left[U(t) - U(t-T)\right]$$

où U est l'échelon unité et T une constante réelle positive .

1) Montrer que le signal de sortie du filtre peut s'écrire $X(t) = \frac{1}{T}\int_{u=t-T}^{t} B(u), t \in R$ .A quoi correspond physiquement cette opération sur le signal d'entrée?
2) Calculer la covariance $C_X(t, t-\tau)$. X est-il stationnaire au sens large?
3) On rajoute une constante déterministe m au signal B, les choses restant les mêmes par ailleurs.
   a) Donner alors les nouvelles covariances pour l'entrée et pour la sortie du filtre.
   b) On considère la moyenne temporelle $\overline{M}(T) = \frac{1}{T}\int_{u=-T/2}^{T/2} M(u), t \in R$ où on note $M(t) = B(t) + m$, m s'interprétant ici comme un signal constant d'amplitude m perturbé par un bruit de mesure B (ce bruit pouvant être amené par exemple par un capteur fournissant le signal M). En utilisant les résultats des questions 1) et 2) donner en fonction de T et N_0 la valeur de l'erreur quadratique moyenne $E([\overline{M}(T) - m]^2)$ entre la sortie du système moyenneur et la moyenne statistique m du signal M. Que devient cette erreur quand $T \to \infty$?
   c) En introduisant la fonction $h : x \in R \to h(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-u^2/2)du$ exprimer en fonction de la fonction inverse h^{-1} et de N_0, ε et p_0 la valeur minimale de T pour que la probabilité $P(\left|\overline{M}(T) - m\right| > \varepsilon)$ soit inférieure à une valeur p_0 donnée.

Exercice n°2

On considère un bruit blanc réel $X(t), t \in R$ de densité spectrale de puissance égale à $N_0/2$ sur *R*.
On forme le signal Y défini par :

$$Y(t) = \beta(X(t) + \alpha X(t-\theta)), t \in R$$

où α et β sont des paramètres réels non nuls et θ un retard. Le signal $Y(t)$ passe ensuite dans un filtre de fonction de transfert $G(f), f \in R$ donnée par :

$$G(f) = 1 \text{ pour } |f| < B/2, = 0 \text{ ailleurs,}$$

B étant un paramètre réel positif fixé. On appelle $Z(t), t \in R$ le signal obtenu en sortie de ce filtre.

1) Calculer la densité spectrale de puissance du signal Z.
   Exprimer l'espérance de la puissance instantanée du signal Z.

2) On considère maintenant le cas particulier $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $B\theta = 1$.
   a) représenter la densité spectrale de puissance de Z.
   b) étant donnée la suite d'échantillons $Z_k = Z(2k\theta)$, k entier, exprimer $R_{km} = E\left[Z_k \cdot Z_m\right]$.

3) On pose $\alpha = -1, \beta = \dfrac{1}{\theta}$. Calculer la densité spectrale (DSP) de puissance de Z et montrer , en utilisant l'approximation $\cos x \cong 1-(x^2/2)$, utilisable quand x est petit, que cette DSP est proche de celle que l'on obtiendrait pour Z dans le cas où Y serait la sortie d'un filtre dérivateur $(Z(t) = \dfrac{dY}{dt})$ dont l'entrée serait le signal X.

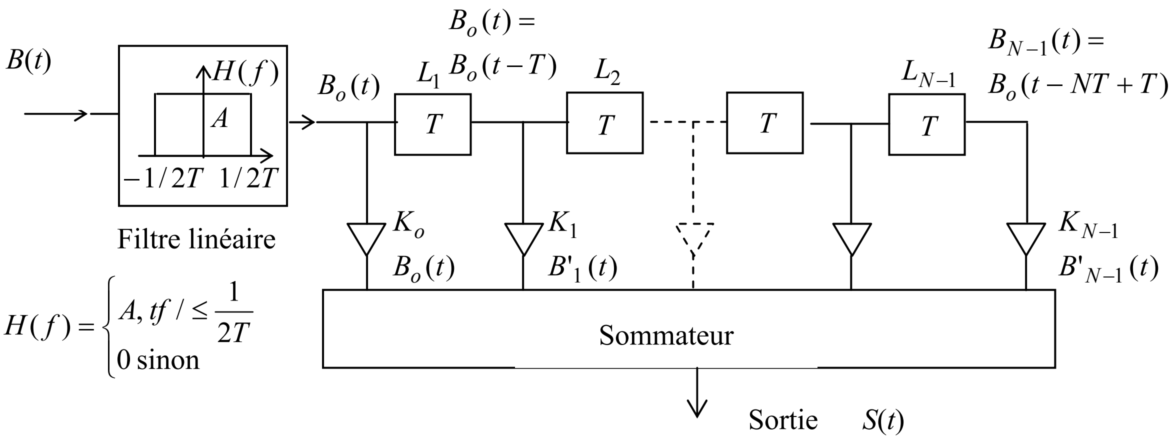
Exercice n°3
On considère un signal aléatoire $X(t)$ tel que :

$$X(t) = A\left(\cos 2\pi f_o t + \phi\right) + B(t), t \in R$$

$B(t), t \in R$ est un signal aléatoire stationnaire au sens large , indépendant de (A,ϕ), avec $\gamma_B(f) = \dfrac{N_o}{2}, f \in R$ comme densité spectrale de puissance. f_o est une constante, A et ϕ sont des v.a. indépendantes entre elles et indépendantes de B. On suppose que A est telle que $E[A] = m$, que $\rho_A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}\exp\left(\dfrac{-(x-m)^2}{2\alpha^2}\right)$, et que la VA ϕ est de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

1) Calculer $E\{X(t)\}, \Gamma_X(\tau), \tau \in R$ et $\gamma_X(f), f \in R$.
2) On présente X sur l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle H, de type RC passe-bas, avec une constante de temps $RC = \theta$. Calculer la fonction de corrélation et la densité spectrale pour le signal de sortie du filtre qu'on notera Y.
3) Donner la puissance moyenne en sortie du filtre.
4) Le signal $S(t) = A\left(\cos 2\pi f_o t + \phi\right), t \in R$ est considéré ici comme un signal utile noyé dans le bruit B. On note $Y_S = H * S$ et $Y_B = H * B$ les composantes du signal de sortie dues respectivement au seul signal utile et au seul bruit en entrée. Considérant le rapport signal à bruit en sortie: $[\dfrac{S}{B}]_Y = \dfrac{E(|Y_S(t)|^2)}{E(|Y_B(t)|^2)}$, trouver la valeur de la constante de temps qui maximise ce rapport. Discuter physiquement le compromis réalisé par le filtre pour cette valeur optimale.

Exercice n°4
On considère le système suivant :



- $B(t)$ est un bruit stationnaire au sens large, gaussien, de densité spectrale égale à $\gamma_B(f) = \dfrac{N_o}{2}$.
- K_0 K_1 ... K_{N-1} sont des coefficients multiplicateur (amplis)

- L_k , $k = 1 \ldots N-1$, désignent des lignes à retard de retard

  $T: \; X(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow Y(t) = X(t-T), T > 0$

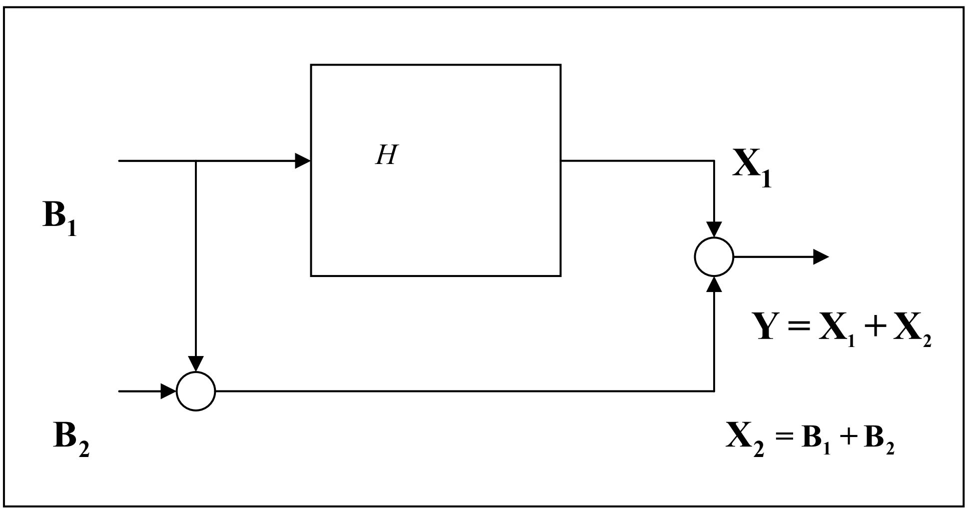
- On a $B'_k(t) = K_k \times B_k(t)$ et $S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} B'_k(t)$ où $B_k(t) = B_0(t - kT)$.

1) Expliquer pourquoi $S(t)$ est lié à $B_o(t)$ par un filtrage linéaire. Donner la réponse temporelle à un dirac et la réponse fréquentielle $H_1(f)$ pour ce filtre.
2) Calculez les fonctions d'autocorrélation $\Gamma_{B_k}(\tau), k = 0 \ldots N-1$.
3) Calculez les fonctions d'intercorrélation $\Gamma_{B_\ell B_k}(\tau)$, $\ell \neq k$, ℓ et $k \in [0, \ldots, N-1]$.
4) Calculez la loi de probabilité de $S(t)$ à l'instant t quand
   a) $K_k = 1 \;\; \forall\, k = 0 \ldots N-1$ en fonction de N_0, A, T et N.
   b) $K_k = \;\; a^k, k = 0 \ldots N-1$ en fonction de N_0, A, T, N et a.
5) Exprimer $\gamma_S(f)$ dans le cas 4) a) en fonction de N_0, A, T et N.

Exercice n°5
On présente sur l'entrée d'un filtre linéaire et homogène discret un bruit blanc discret centré B tel que $\Gamma_B[0] = \alpha$. En considérant que la fonction d'intercorrélation entre la sortie S du filtre et son entrée est $\Gamma_{S,B}[p] = Ka^p \cdot U[p], p \in Z$ où $a \in]0,1[$,calculer la DSP de S.

Exercice n°6
Soit un filtre discret de réponse impulsionnelle :
$H[n] = \delta_0[n] - 1/2 \cdot \delta_1[n] - 1/2 \cdot \delta_2[n], n \in \mathbb{Z}$ (où $\delta_k[n] = 1$ si $n = k$ et $= 0$ sinon).
Un bruit $B[n], n \in \mathbb{Z}$ correspondant à une suite de V.A. décorrélées 2 à 2 de même moyenne m_B et même variance σ_B^2 est présenté sur l'entrée de ce filtre. On obtient ainsi en sortie un SAD noté $X[n], n \in \mathbb{Z}$.
1)Donner la DSP (densité spectrale de puissance) et la fonction de corrélation de B.
2)Calculer la DSP et la fonction de corrélation de X. Que vaut la puissance statistique moyenne de X ?
3)On ajoute au signal X de sortie un deuxième bruit $B_1[n], n \in \mathbb{Z}$ SSL (stationnaire au sens large) admettant pour fonction de corrélation $\Gamma_{B_1}[p] = \alpha^{|p|}, p \in \mathbb{Z}$ où α est un réel de valeur absolue inférieure à 1.Ce bruit est supposé indépendant du premier bruit B .Calculer la densité interspectrale de puissance $\gamma_{B,Y}^d(f)$ entre l'entrée du filtre et le signal $Y = X + B_1$. Donner l'expression de la densité interspectrale en Z, $\gamma_{B,Y}^Z(z)$, correspondante en précisant son domaine de convergence.

Exercice n°7
.On considère le système :



- B_1 et B_2 sont deux signaux aléatoires gaussiens indépendants, stationnaires au sens large et admettant les DSP (densité spectrale de puissance) :
  $\gamma_{B1}^d(f) = b^2 + a^2\delta_0(f)$, $\gamma_{B_2}^d(f) = c^2$ pour $f \in [-1/2, 1/2[$.

  a, b et c sont des constantes réelles. Pour $|p|$ grand les VA $B_1[n]$ et $B_2[n+|p|]$ sont considérées comme étant indépendantes.

- H est un filtre linéaire et homogène de réponse impulsionelle sur Z : $H[n] = \alpha^n U[n], \alpha \in]-1,1[$.

1) Quelle la réponse en fréquence de H ?
2) Quelles sont les PSM (puissance statistique moyenne) de B_1 et de B_2.
3) Calculer la fonction d'autocorrélation de X_1 et sa densité spectrale. Quelle est la variance de X_1 ?
4) Calculer l'intercorrélation entre X_1 et X_2 ?
5) Calculer la DSP $\gamma_Y^d(f)$.
6) Donner la loi de probabilité de $X_1[n]$ et la variance de $Y[n]$.

Exercice n°8

Dans le **TP no 2** est analysé le système en temps discret constitué d'un bruit $B[n], n \in Z$ présenté en entrée d'un filtre linéaire en temps discret de fonction de transfert $Z_H(z) = \dfrac{b}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$, a étant un réel tel que $|a| < 1$, la sortie étant notée $X[n], n \in Z$. Le bruit B correspond à une suite de VA décorrélées de même moyenne m_B et même variance σ_B^2.

1) Donner les expressions théoriques des moyennes, covariances et densité spectrales pour l'entrée d'une part et la sortie d'autre part.
2) Donner les expressions pour la covariance croisée entre l'entrée et la sortie et la densité spectrale croisée entre l'entrée et la sortie.
3) Dans le cas où le signal B est supposé gaussien, préciser les densités de probabilité conjointes pour les paires $(B[n], B[n+p])$, $(X[n], X[n+p])$, $(B[n], X[n+p])$.

Exercice n°9 (Introduction à l'idée de filtrage optimal)

Un signal aléatoire $S[n], n \in Z$ (porteur d'information, comme un signal de parole par exemple) est transmis sur un canal bruité à la sortie duquel on reçoit le signal $X[n] = B[n] + S[n], n \in Z$. Le bruit est centré et de DSP constante égale à $N_0/2$ sur R. Il est indépendant du signal utile. La densité spectrale de puissance de S est définie, sur l'intervalle $f \in [-1/2, 1/2[$, par $\gamma_S^d(f) = a(1 - (|f|/B)), |f| < B < 1/2$ et $= 0$ ailleurs, avec $a > N_0/2$. Le "spectre" du signl est dons du type passe-bas.

Pour débruiter le signal en réception on suppose ne disposer que de filtres passes bas de réponse harmonique du type $\hat{H}(f) = 1_{[-b,b]}(f), f \in [-1/2, 1/2[$.

Trouver la fréquence de coupure b qui minimise l'erreur quadratique moyenne $E([S(t) - Y(t)]^2)$ entre le signal S et la sortie Y du filtre H avec X sur son entrée et donner la valeur de l'erreur moyenne quadratique minimale ainsi obtenue. Interpréter le résultat.