TD : Espaces vectoriels (4)

Compléments mathématiques

Licence STS Mention Electronique, année 2004-2005

Exercice 1.

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et les applications $f : E \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow E$ définies par $f(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta, 2\alpha)$ et $g(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in E$.

1. Démontrer que f et g sont des automorphismes de E et déterminer f^{-1} et g^{-1} .
2. On pose $h = f \circ g - g \circ f$. Déterminer $\text{Ker}(h)$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? h est-elle injective? Déterminer $\text{Im}(h)$. h est-elle surjective?

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer la matrice associée à f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3.

On considère les trois matrices, à coefficients réels, suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer les produits AB , AC et BA . Que remarque-t-on?
2. Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2 .

Exercice 4.

1. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $N \times N$ à coefficients réels. Ecrire la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ par $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{trace}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.