

## LISTE N°4 - PROBABILITES

I - On tire au hasard de manière équirépartie deux points, indépendamment l'un de l'autre, sur le segment  $[0, 1]$ . On regarde à chaque fois celui qui tombe le plus près de 1.

Quelle est la distance moyenne de ce point par rapport à l'origine ?

II - Soit  $X$  une variable aléatoire équirépartie sur  $[-1, 1]$ .

1) Donner la loi de  $X_1 = |X|$ .

2) Calculer la moyenne et la variance de  $X_1$ .

3) Sans passer par la loi de  $X_2 = \sup(0, X)$ , calculer sa moyenne et sa variance.

4) Sans passer par la loi de  $X_3 = \min(|X|, a)$ , où  $|a| < 1$ , calculer sa moyenne et sa variance.

III - Soient  $X_1 \dots X_N$ ,  $N$  variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre  $a$  :

$$\forall i, p_{X_i}(x) = U(x)a.e^{-ax}$$

On considère  $Y = \min(X_1, \dots, X_N)$  et  $Z = \max(X_1, \dots, X_N)$ .

1) Quelles sont les valeurs possibles du paramètre  $a$  ?

2) Donner les densités de probabilité de  $Y$  et  $Z$ .

3) Calculer la probabilité pour que  $Y < y$  et  $Z < z$  simultanément.

IV - Ayant choisi une fois pour toutes un point fixe  $A$  sur la circonférence d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R = 1$ , on tire au hasard un point  $M$  de la circonférence. On pourra considérer que  $M$  est obtenu par la valeur  $\phi$  d'une variable aléatoire  $\Phi$  uniformément répartie sur  $[-\pi, \pi]$ . Soit  $x$  la longueur de la corde  $AM$  et  $X$  la variable aléatoire dont  $x$  est une réalisation.

1) Quelle est la loi de  $X$  ?

2) Quelle est sa moyenne ?

V - Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne centrée d'écart-type  $\sigma$ . Soit  $Y$  la variable aléatoire définie par  $Y = |X|$ .

Calculer la moyenne et la variance de  $Y$ .