DIIC 1ère année **2004/2005**

TD de TRF – Liste 4

I. Polynômes de Tchebycheff de 1ère espèce $T_n(x)$

1. Montrer que $\cos n\theta$ peut être exprimé comme un polynôme en $\cos\theta$, soit :

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta) .$$

Déterminer le degré et la parité de $T_n(x)$. Montrer que le terme de plus haut degré de $T_n(x)$ vaut :

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} = 2^{n-1},$$

où le symbole $[x]$ désigne la partie entière de x.

2. Etablir la formule de récurrence :

$$T_{n+1}(x) - 2x\, T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad , \quad n \geq 1 .$$

3. Etablir la relation d'orthogonalité :

$$\int_{-1}^{+1} T_m(x)\ T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad m = n > 0, \\ \pi & \text{si} \quad m = n = 0 \end{cases}$$

En déduire que pour tout $m < n$: $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x^m \quad T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

4. Etablir le développement (on pourra supposer $|x| \leq 1$), pour $0 < t < 1$:

$$T_0(x) + 2 \sum_{n \geq 1} T_n(x)\ t^n = \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} .$$

5. L'espace C[-1, +1] des fonctions réelles continues dans [-1, +1] est supposé muni du produit scalaire :

$$(f,g) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

Soit $f \in \mathrm{C}[-1, +1]$ et $\hat{f}$ la meilleure approximation de *f* au sens de la norme déduite du produit scalaire précédent dans le sous-espace engendré par $T_0(x), ..., T_n(x)$:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) .$$

Calculer (c_k) en fonction de *f* et (T_k).

Les polynômes (T_k) forment-ils un système complet dans C[-1, +1] (dites pourquoi) ? En déduire une relation entre $\|f\|^2$ et la suite des (c_k).

II. 1. Calculer et représenter graphiquement la convoluée des deux fonctions $1_{[-a,a]}(x)$ et $1_{[-b,b]}(x)$ (on supposera $a \leq b$).

2. En déduire les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^3 x}{x^3}\ dx$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 x}{x^4}\ dx$.

3. Montrer que si la TF $\hat{f}(\nu)$ de la fonction *f*(*t*) est nulle hors de [-*B*, *B*], on a pour tout $a > 2\pi B : f(t) * \dfrac{\sin\ at}{\pi t} = f(t)$ (où $*$ est l'opérateur de convolution).

III. Relation du parallélogramme

1. Tous les géomètres connaissent le lemme de la médiane : étant donné un triangle ABC, et M le milieu du côté BC, on a : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$. Démontrer le lemme de la médiane.

2. On sait que dans tout espace euclidien (*i.e.* un espace vectoriel normé dont la norme dérive d'un produit scalaire), la relation du parallélogramme a lieu :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \qquad (1)$$

Montrer que l'espace $\mathbb{R}^n$ des vecteurs $x = [x_1,...,x_n]^T$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$, puis de la norme $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, n'est pas un espace euclidien (prendre $n = 2$ et donner un contre-exemple).

3. Même question dans C[0, 1], muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1} |f(x)|$, puis de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

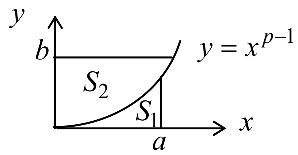
4. Montrer que dans un espace euclidien réel, dont le produit scalaire est noté (x, y), la relation suivante à lieu :

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]. \qquad (2)$$

IV. Inégalités de Hölder et de Minkowski

1. Soient p et q deux nombres réels > 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En évaluant les deux surfaces indiquées sur la figure établir l'inégalité :

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a,b \ge 0). \qquad (1)$$



2. Soient f et g deux fonctions numériques (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que

$$\int_\Omega |f|^p\, d\mu < \infty\ ,\ \int_\Omega |g|^q\, d\mu < \infty\,.$$

Etablir l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega |fg|\; d\mu \le \left[\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right]^{1/p} \left[\int_\Omega |g|^q\, d\mu\right]^{1/q} \qquad (2)$$

(Indication : la relation cherchée est homogène ; si elle a lieu pour f et g, elle a lieu aussi pour αf et βg. Il suffit donc de considérer le cas où $\int_\Omega |f|^p\, d\mu = \int_\Omega |g|^q\, d\mu = 1$. Intégrer alors les deux membres de l'inégalité (1), après y avoir remplacé a par $|f|$ et b par $|g|$).

3. Etablir l'inégalité $(p > 1 \text{ et } a,b \ge 0) : (a+b)^p \le 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right)$ (observer que la fonction $x^p, p > 1, x \ge 0$, est convexe : la corde joignant deux points de la courbe est au dessus de la courbe).
En déduire que si f et g sont deux fonctions de puissance $p^{ème}$ sommable, leur somme est de puissance $p^{ème}$ sommable.

4. Soient f et g deux fonctions de puissance $p^{ème}$ sommable ($p > 1$). En observant que $|f+g|^p \le |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g|$ et en appliquant deux fois au second membre l'inégalité de Hölder avec $p' = \frac{p}{p-1}, q' = p$, établir l'inégalité de Minkowski :

$$\left[\int_\Omega |f+g|^p\, d\mu\right]^{1/p} \le \left[\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right]^{1/p} + \left[\int_\Omega |g|^p\, d\mu\right]^{1/p} \qquad (3)$$

5. En déduire que dans l'espace $L^p(\Omega, A, \mu)$ des (classes d'équivalence pour l'égalité pp des) fonctions de puissance $p^{ème}$ sommable, où $p > 1$, la relation $\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right]^{1/p}$ définit une norme.