TD 4 : Séries entières (suite)

DEUG STPI, semestre 4, année 2003-2004

Exercice 1.

Expliquer et démontrer pourquoi la convergence normale d'une série de fonctions implique la convergence uniforme.

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$A = \sum_{n \geq 2} \log\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) z^n \tag{1}$$

ainsi que celui de :

$$B = \sum_{n \geq 1} \frac{(\log(n!))^a}{(n!)^b} z^n \ , \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

en utilisant le fait que $\log(n!) \approx n \log(n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3.

Développer en séries entières les fonctions suivantes :

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ , pour tout } x \in]-1,1[\tag{3}$$

$$g(x) = \mathrm{Arcsin}(x) \text{ , pour tout } x \in]-1,1[\tag{4}$$

$$h(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \text{ , pour tout } x \in]-1,1[\tag{5}$$

en utilisant le fait que $\mathrm{Arcsin}(x)$ est une primitive de $\left(x^2-1\right)^{-1/2}$ ainsi que le développement limité suivant :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x) \tag{6}$$