

TD : Espaces vectoriels (3)

Compléments mathématiques Licence STS Mention Electronique

Exercice 1.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $a = (1, -1, 0)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (1, -1, 1)$.

1. Ecrire les vecteurs de la base canonique de E .
2. Démontrer que (a, b, c) est une base de E .
3. Quelles sont, dans cette base, les coordonnées du vecteur (x_1, x_2, x_3) ?

Exercice 2.

Dans $E = \mathbb{C}^4$, on donne les vecteurs $a = (1, i, 0, 0)$ et $b = (0, 0, i, 1)$ où $i^2 = -1$. Vérifier que la suite (a, b) est libre. Compléter (a, b) en une base de E .

Exercice 3.

Soit $E = F = \mathbb{R}^2$. Dire parmi les applications u suivantes celles qui sont linéaires de E dans F et, si oui, déterminer leur noyau et leur image :

$$u(x, y) = (2x + 3y, x) \quad (1)$$

$$u(x, y) = (y, x + y + 1) \quad (2)$$

$$u(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \right) \quad (3)$$

Exercice 4.

Soit $E = \mathbb{C}^4$ et $u : E \longrightarrow E$ définie par $u(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha, \delta, 0, 0)$ pour tout $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$. Vérifier que u est un endomorphisme de E . Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Exercice 5.

Soient les $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels $E = \mathbb{C}^3$, $F = \mathbb{C}[X]$ (i.e. l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$) et l'application $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha - \beta + (\beta - \gamma)X + (\gamma - \alpha)X^2$ pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in E$. Vérifier que f est linéaire. Puis déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 6.

Soit l'application $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - XP'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. A-t-on $\mathbb{R}[X] = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?