

Exercice 1. Système à démodulation cohérente.

On considère un signal du type modulation analogique d'amplitude S définie par $S(t) = A(t) P(t)$ où $P(t) = \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$ et $t \in \mathbb{R}$. Le signal modulant A est stationnaire au sens large à l'ordre 2 et admet une Densité Spectrale de Puissance (DSP) nulle pour $|f| > B/2$ et égale à $1 - (|2f| / B)$ sinon. La phase Φ est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, f_0 étant une fréquence fixée strictement supérieure à $B/2$. Au cours de la transmission un bruit B_1 gaussien, centré, de covariance stationnaire et de DSP égale à la constante $N_0/2$ sur $\mathbb{R}$, s'ajoute à $S(t)$. En réception le signal X défini par $X(t) = S(t) + B_1(t)$ est présentée sur l'entrée d'un démodulateur (dit cohérent) qui fournit en sortie un signal de démodulation Y donnée par $Y(t) = (Z^* H)(t)$ où $Z(t) = X(t) R(t)$ et $R(t) = \cos(2\pi f_0 t + \Phi + \Delta)$. R est un signal généré localement le plus en phase possible avec P , Δ étant une erreur d'ajustement de phase considérée plus loin comme une variable aléatoire. Notons que les quantités aléatoires $A(t)$, $B_1(t)$, Φ et Δ sont modélisées comme étant indépendantes dans l'ensemble. Le filtre H est destiné à éliminer les composantes de fréquences élevées, on choisit ce filtre comme étant un filtre passe-bas de support fréquentiel $[-B/2, B/2]$ et de gain constant égal à 2 sur ce support.

- 1) En raisonnant de manière déterministe sans la présence du bruit B_1 , montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $Y(t) = A(t)$ (on supposera que la transformée de Fourier du signal A existe et que son support est inclus dans l'intervalle $[-B/2, B/2]$).
- 2) Calculer la covariance non centrée de X , puis sa DSP.
- 3) Montrer que le signal B_2 défini par $B_2(t) = \sqrt{2} B_1(t) \cos(2\pi f_0 t + \Phi + \Delta)$ admet une DSP égale à celle de B_1 .
- 4) Calculer le rapport $E[(Y(t) - A(t))^2] / E[A(t)^2]$ dans le cas où la variable Δ est nulle puis dans le cas où Δ suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ (on s'appuiera sur le résultat de la question 1)). Puis, interpréter ce rapport et l'influence de Δ .

Exercice 2.

On considère un signal aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$, centré, stationnaire au sens large et admettant pour DSP :

$$\gamma_x(f) = 1 - \frac{\|f\| - f_0}{B} \text{ pour } \|f\| - f_0 \leq B \text{ et } = 0 \text{ sinon, avec } 0 < B < f_0$$

On considère d'autre part $Y(t) = A_x(t)$ obtenu par la convolution de X avec un filtre linéaire de réponse en fréquence $\hat{H}(f) = 2U(f)$ sur $\mathbb{R}$ où U désigne l'échelon unité.

- 1) Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre H ?
- 2) Quelle est la densité spectrale de puissance $\gamma_{A_x}(f)$, $f \in \mathbb{R}$ du signal aléatoire A_x ?
- 3) On introduit l'enveloppe complexe E_x de X relative à la fréquence f_0 définie par :

$$E_x(t) = e^{-2\pi i f_0 t} \cdot A_x(t)$$

On considère la décomposition en parties réelle et imaginaire de E_x , $E_x(t) = R(t) + iI(t)$.

- a). Exprimer $X(t)$ en fonction $R(t)$, $I(t)$, $\cos(2\pi f_0 t)$, $\sin(2\pi f_0 t)$.
- b) Montrer que R et I sont deux signaux aléatoires décorrélés (càd de densité spectrale croisée nulle puisqu'ils sont centrés) et qu'ils admettent la même DSP que l'on exprimera.

Indication : on posera $2iI = E_x - E_x^*$ et $2R = E_x + E_x^*$ et on utilisera la formule des interférences.

Exercice 3. Démodulation d'enveloppe (dite démodulation non cohérente).

On ne suppose plus ici disposer d'un signal de référence porteuse à la réception. On modifie en conséquence le système comme suit :

- le signal d'émission est modifié en un signal X_1 obtenu en remplaçant $A(t)$ par $C(1+kA(t))$ où k est une constante réelle choisie telle que la probabilité pour que $kA(t) < -1$ est négligeable et où C est une autre constante réelle permettant d'ajuster la puissance à l'émission.
- le récepteur reconstruit à partir du signal reçu le signal d'enveloppe Y_1 (au moyen d'un dispositif non linéaire) comme suit:

$Y_1(t) = \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}, t \in R$ où α et β correspondent respectivement à la partie réelle et à la partie imaginaire de l'enveloppe complexe du signal reçu et préfiltré, enveloppe complexe définie par :

$$E_x(t) = e^{-2\pi i f_0 t} TF^{-1}(2\widehat{U}(\cdot)\widehat{X}_1(\cdot)\widehat{G}(f))(t), t \in R$$

où G correspond à un filtre passe bande, de bande passante centrée sur f_0 et de largeur de bande juste nécessaire à préserver l'information utile. Ce filtre est placé en amont du démodulateur d'enveloppe.

1) Dans la décomposition de $V(t) = G(t) * X_1(t)$, $V(t) = \alpha(t) \cos(2\pi f_0 t) - \beta(t) \sin(2\pi f_0 t)$, $t \in R$, exprimer α et β sous la forme d'une somme de termes dépendant respectivement du signal et du bruit et que l'on caractérisera statistiquement.

2) Etudier la puissance statistique moyenne de la composante de bruit dans Y_1 dans le cas où on peut considérer que le niveau de bruit est faible devant le niveau de signal en entrée du démodulateur après passage dans le filtre passe bande.

Exercice 4. Comparaison entre les 2 systèmes de démodulation (cohérente et non cohérente)

1) En supposant que l'on présente le même signal d'émission S_1 , d'une part en entrée du système à démodulation cohérente, et d'autre part en entrée du système à démodulation non cohérente, comparer les rapports signal à bruit respectifs sur Y à niveau de bruit faible. Que peut-on dire qualitativement dans le cas où le niveau de bruit est au contraire élevé.

2) On suppose que la puissance statistique moyenne du signal émis est réglée à une valeur P_0 aussi bien pour le signal S que pour le signal S_1 en introduisant un facteur multiplicatif réel sur S et en ajustant C pour S_1 . On suppose également que, $A(t), t \in R$ étant supposé gaussien, la probabilité $P(|A(t)| > 3\sigma_{A(t)})$ est négligeable. En conséquence on prend $k = 1/(3\sigma_{A(t)})$. Toujours dans l'hypothèse de bruit faible, comparer à nouveau les rapports signal à bruit en sortie de chaque système (les signaux d'entrée étant cette fois évidemment S pour le premier et S_1 pour le 2^{ème}). Pensez vous qu'il soit justifié d'effectuer une telle comparaison?