TD sur les ondelettes

Master 1 Mention Electronique, année 2004-2005

`Laboratoire LTSI - Université de Rennes1`

Exercice 1 (TF à court terme)

Soit $g(t) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on considère la famille des translatés temporellement et modulés en amplitude (on dit aussi translatés fréquentiellement) de $g(t)$, notée $\{g_{\nu,b}(t) = g(t-b)\,\mathrm{e}^{i2\pi\nu t}, (\nu,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Cette dernière définit, comme nous l'avons vu en cours, une famille de Weyl-Heisenberg et nous permet de définir la Transformée de Fourier à court terme du signal $s(t)$, notée $S_s(\nu,b)$:

$$\forall (\nu,b) \in \mathbb{R}^2, \quad S_s(\nu,b) = \mathrm{TF}\left\{s(t)\, g(t-b)^*\right\}(\nu)$$

Démontrer que $S_s(\nu,b)$ vérifie également l'équation suivante :

$$\forall (\nu,b) \in \mathbb{R}^2, \quad S_s(\nu,b) = \mathrm{e}^{-i2\pi\nu b}\ \mathrm{TF}^{-1}\left\{\hat{s}(f)\, \hat{g}(f-\nu)^*\right\}(b)$$

On s'aidera de la relation de Parseval-Plancherel.

Exercice 2 (TF à court terme)

En supposant que $E_g \neq 0$ où :

$$E_g = \|g\|^2 = \langle g,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2\, dt$$

démontrer que l'application $\frac{1}{\|g\|}S$ est une isométrie de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 3 (équation à 2 échelles)

Soient $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une Analyse MultiRésolution (AMR) de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et $\phi(t) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ la fonction d'échelle associée telle que $\{\phi(t-k)\,,\, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormale de V_0. Alors il existe $(h_0(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_0(k)\,\phi(t-k)$$

La précédente équation est plus connue sous le nom d'*équation à 2 échelles*. Donner la version fréquentielle de cette équation. En déduire, sous l'hypothèse $|\hat{\phi}(0)| = 1$, que h_0 est un filtre passe-bas.

Exercice 4 (AMR de Haar)

Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ l'AMR (dite *de Haar*) de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_j = \left\{x\,(t) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\,|x\,(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \text{ pour } t \in \left[2^j k{,}2^j\,(k+1)\right]\right\}$$

1. Que peut-on dire de $\ell im\,(V_j)$ quand j tend vers $-\infty$? vers $+\infty$?

2. Choisir une fonction d'échelle appropriée $\phi\,(t)$ afin d'obtenir base orthonormée de V_0.

3. Déterminer le filtre h_0 associé à la fonction d'échelle retenue et vérifiant l'équation à 2 échelles (c.f. exercice 3).

4. En prenant $h_1\,(k) = (-1)^k\,h_0\,(2p+1-k)^*$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $p = 0$, déterminer la fonction $\psi\,(t)$ vérifiant l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1\,(k)\,\phi\,(t-k)$$

La fonction $\psi\,(t)$ est plus connue sous le nom d'*ondelette mère*. Rappelons par ailleurs que la famille $\left\{\frac{1}{2^{j/2}}\psi\left(\frac{t}{2^j}-k\right),\ (j{,}k) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ forme une base orthogonale de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.