TD : Espaces vectoriels (3)

Compléments mathématiques
Licence STS Mention Electronique, année 2004-2005

Exercice 1.

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $a = (1, -1, 0)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (1, -1, 1)$.

1. Ecrire les vecteurs de la base canonique de E.
2. Démontrer que (a, b, c) est une base de E.
3. Quelles sont, dans cette base, les coordonnées du vecteur (x_1, x_2, x_3) ?

Exercice 2.

Dans $E = \mathbb{C}^4$, on donne les vecteurs $a = (1, \mathrm{i}, 0, 0)$ et $b = (0, 0, \mathrm{i}, 1)$ où $\mathrm{i}^2 = -1$. Vérifier que la suite (a, b) est libre. Compléter (a, b) en une base de E.

Exercice 3.

Soit $E = F = \mathbb{R}^2$. Dire parmi les applications u suivantes celles qui sont linéaires de E dans F et, si oui, déterminer leur noyau et leur image :

$$u(x, y) = (2x + 3y, x) \tag{1}$$
$$u(x, y) = (y, x + y + 1) \tag{2}$$
$$u(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}\right) \tag{3}$$

Exercice 4.

Soit $E = \mathbb{C}^4$ et $u : E \longrightarrow E$ définie par $u(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha, \delta, 0, 0)$ pour tout $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$. Vérifier que u est un endomorphisme de E. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 5.

Soient les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $E = \mathbb{C}^3$, $F = \mathbb{C}[X]$ (i.e. l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$) et l'application $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha - \beta + (\beta - \gamma) X + (\gamma - \alpha) X^2$ pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in E$. Vérifier que f est linéaire. Puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6.

Soit l'application $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P - XP'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. A-t-on $\mathbb{R}[X] = \mathrm{Ker}(\mathrm{f}) \oplus \mathrm{Im}(f)$?