

TD de TRF – Liste 3

I. 1. Etablir la relation :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad 0 < x < \pi. \quad (1)$$

2. On note $S_n(x)$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série précédente :

$$S_n(x) = \sin x + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Calculer l'abscisse du premier maximum de $S_n(x)$ quand x parcourt l'intervalle $[0, \pi]$.

3. Calculer l'ordonnée du premier maximum, et montrer qu'elle tend si n tend vers l'infini vers :

$$M = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

(indication : pour le calcul de l'ordonnée, écrire que $S_n(x) = \int_0^x S'_n(t) dt$. Pour le calcul de M , justifier soigneusement l'interversion de la limite et du signe somme).

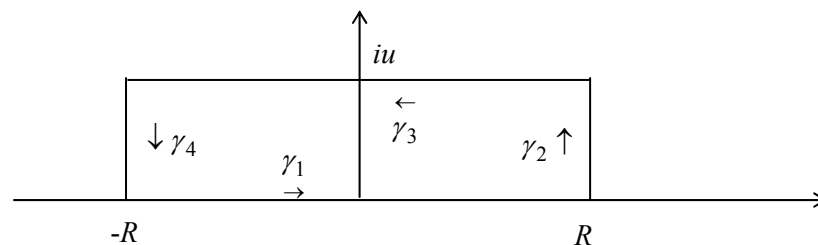
4. Par une minoration simple de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ entre 0 et π , montrer que $M > \pi/4$. La convergence de la série (1) est-elle uniforme dans $]0, \pi[$?

II. (Fonction caractéristique de la loi de Gauss). TF de la gaussienne.

Cet exercice a pour but d'établir la relation :

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} + iux} dx = e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Intégrer la fonction $f(z) = e^{-z^2/2 + iuz}$ le long du contour suivant :



Montrer que l'intégrale de f le long de γ_2 et γ_4 tend vers 0 si $R \rightarrow \infty$, puis en déduire $\varphi(u)$.

En déduire la TF (Transformée de Fourier) de $g(t) = \exp(-t^2/2)/\sqrt{2\pi}$ définie par :

$$\hat{g}(v) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-i2\pi vt} dt.$$

III. (Polynômes de Legendre) On note $C[-1,+1]$ l'espace des fonctions réelles, continues, définies dans l'intervalle fermé $[-1,+1]$. Cet espace est supposé muni de produit scalaire : $(f,g) = \int_{-1}^{+1} f(t) g(t) dt$.

Dans $C[-1,+1]$, on considère la suite des polynômes de Legendre $P_0(t)=1$, $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (t^2-1)^n}{dt^n}$, $n \geq 1$.

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4 .
2. Montrer que P_n est un polynôme de degré n et calculer le coefficient de t^n .
3. On pose $u_n(t) = (t^2-1)^n$. Montrer que toutes les dérivées de u_n jusqu'à l'ordre $n-1$ s'annulent aux points -1 et $+1$.
4. En déduire que pour tout $m < n$: $\int_{-1}^{+1} P_n(t) t^m dt = 0$ (indication : intégrer par parties).
5. Déduire de la question précédente que pour tout $m \neq n$: $(P_m, P_n) = 0$.
6. Montrer que $\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(t) dt = \frac{2}{2n+1}$.
7. Le système des polynômes de Legendre est-il complet dans $C[-1,+1]$? (dites pourquoi).

IV. 1. On rappelle qu'une suite $(s_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes est convergente au sens de Césaro si la suite des moyennes arithmétiques $\sigma_n = \frac{s_0 + \dots + s_{n-1}}{n}$ est convergente dans $\mathbb{C}$.

Montrer que si la suite (s_n) converge au sens ordinaire et admet la limite s elle converge au sens de Césaro et admet la même limite.

2. Application : lemme de Kronecker : si la **série** $\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}$ est convergente, la **suite** $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow 0$

(poser $s_k = \sum_{m=1}^k \frac{x_m}{m}$, observer que pour $k \geq 2$, $x_k = k(s_k - s_{k-1})$ et utiliser la question 1.).