TD 3 : Séries de fonctions & séries entières (suite)

DEUG STPI, semestre 4, année 2003-2004

Exercice 1.

1. Montrer que $\log(1+u) \leq u$ pour tout $u \geq 0$. Pour ceci, on étudiera la fonction $u \to u - \log(1+u)$ sur l'ensemble des réels positifs.
2. On considère la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \log(1 + \frac{x^2}{n^2})$$

où $u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. En se servant de la question 1, montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et qu'elle converge normalement sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

On considère la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \frac{x}{n(x+n)}$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, et normalement sur tout intervalle $[0,A]$ avec $A > 0$. Soit $v(x)$ la somme de la série. Dire pourquoi $v(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer $a_n = \int_0^1 u_n(x)dx$, et justifier le fait que $a_n > 0$. Indiquer pourquoi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (on comparera la somme de cette série à $\int_0^1 v(x)dx$). En déduire que la suite de terme général

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1)$$

est convergente.

Exercice 3.

Montrer que la série de fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\sin x)^n$$

converge uniformément sur tout intervalle fermé inclus dans $[0,\pi/2[$.

Exercice 4.

Calculer les rayons de convergence des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$