

TD : Suites de fonctions

Mathématiques
Licence STS Mention Electronique

Laboratoire LTSI - Université de Rennes1

Exercice 1.

Etudier en terme de convergence simple et uniforme les suites de fonctions définies par :

1. $f_n(x) = e^{-nx}$ pour tous $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ pour tous $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$;
3. $h_n(x) = e^{-nx} \sin(x)$ pour tous $x \in [0, +\infty[$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.

Examiner la convergence¹ en moyenne et en moyenne quadratique des suites de fonctions définies par :

1. $f_n(x) = \sqrt{n}e^{-n^2x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (utiliser $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$)
2. $g_n(x) = \begin{cases} \frac{n^2 \sin(nx)}{2\pi} & \text{pour tout } x \in [-\pi/n, \pi/n] ; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$;
3. $h_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi n^2} \sqrt{n^2 - x^2} & \text{pour tout } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 3.

Déterminer si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses. On donnera une démonstration complète dans le premier cas et un contre-exemple dans le deuxième cas. Les fonctions f_n (non nécessairement continues) sont définies sur un intervalle I .

1. Si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si f est bornée sur I , alors chaque f_n est bornée sur I . (On rappelle que f est bornée sur I si et seulement si il existe $B > 0$ tel que, pour tout x de I on ait $|f(x)| < B$) ;
2. Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément respectivement vers f et g sur I , alors $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers $f + g$ sur I ;
3. Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément respectivement vers f et g sur I , alors $(f_n g_n)$ converge uniformément vers $f g$ sur I ;
4. Si (f_n) converge uniformément sur $[a, b[$ et si la suite numérique $(f_n(b))$ est convergente, alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

¹Attention : la convergence uniforme n'implique les trois autres que si l'on travaille sur un compact (fermé borné).