

TD : Espaces vectoriels (2)

Compléments mathématiques

Licence STS Mention Electronique et Télécommunications

Exercice 1.

1. Soient $F = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Pour cela, montrer que $F \cup G$ n'est pas stable par linéarité en prenant deux éléments de $F \cup G$ bien choisis. Que peut-on en déduire sur la réunion de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel ? Est-ce en général un sous-espace vectoriel ?
2. Soit F sous-espace vectoriel de E . Son complémentaire $F^C = E - F$ est-il lui aussi un sous-espace vectoriel ? Justifier la réponse.

Exercice 2.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f(x)$ d'une variable réelle définies sur un intervalle $[-a, +a]$. Soient P l'ensemble des fonctions paires et I celui des fonctions impaires.

1. Montrer que les ensembles P et I sont deux sous-espaces vectoriels de E ;
2. P et I sont-ils supplémentaires de E ?

Exercice 3.

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces d'un espace vectoriel E donné.

1. A quelle condition $F_1 \cup F_2$ est-elle un sous-espace vectoriel de E ? ;
2. Dans le cas général, démontrer que $F_1 + F_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F_1 \cup F_2$.

Exercice 4.

Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on donne les vecteurs $a = (1, 0)$, $b = (1, 1)$ et $c = (0, 1)$. Que peut-on dire de la suite (a, b, c) , puis de la suite (a, b) ?